

数値流体力学の基礎と宇宙気体力学

蜂巢泉¹

平成28年6月22日

¹ 東京大学大学院総合文化研究科広域科学専攻 e-mail: hachisu@ea.c.u-tokyo.ac.jp Web page:
<http://lyman.c.u-tokyo.ac.jp/~hachisu/lecture/hydro/hydro.shtml>

第1章 圧縮性流体の基礎方程式

気体の圧縮性は音速 (sound speed) と気体の速度の比 $M = v/c$ (Mach 数) の2乗 (M^2) の効果として現れる。従って、マッハ数が0.3程度より大きくなったら、圧縮性の効果を入れなければならない。一般に、宇宙における様々な現象は、高マッハ数 ($M \gg 1$) ながれになる場合が多いので、圧縮性は本質的である。音速 (sound speed) は、

$$c = \left(\gamma \frac{P}{\rho} \right)^{1/2}, \quad (1.1)$$

と表せる。ここで、 γ は定圧比熱 C_p と定積比熱 C_V の比

$$\gamma = \frac{C_p}{C_V}, \quad (1.2)$$

で与えられる。ながれの速度が音速よりも大きい時、超音速 (supersonic) といい、遅い時、亜音速 (subsonic) という。超音速と亜音速の領域が同時に存在、あるいは時間的に前後して現れるような場合は、遷音速 (transonic) という。

宿題: 銀河の中に存在するガスは水素が主体であるが、温度が、hot (10^6 K)、warm (10000 K)、cold (100 K) の3つの状態にあると考えられている。それぞれの音速を求めよ。なお、状態方程式 $P = kT\rho/\mu H$ において、平均分子量 μ の値が温度によりどうなるかも考慮せよ。地球大気における音速はどうかなるか? $T = 300$ K として、成分は窒素分子 80%、酸素分子 20% として計算せよ。

1.1 ながれの保存則

圧縮性流体の基礎方程式をながれの保存則、すなわち、質量保存、運動量保存、エネルギー保存から導出する。ある閉曲面 S で囲まれた体積 V について、上の3つの保存則を適用する。まず、体積 V 中の質量の単位時間あたりの変化は、

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho dV, \quad (1.3)$$

と表すことができる。ここで考える物理的な量 (例えば、密度 ρ や速度 \mathbf{u}) は時間 t と場所 $\mathbf{r} = (x, y, z)$ の関数だから、時間についての微分積分と空間についての微分積分は独立なので、交換可能である。物理量を時間と空間の関数として表す形式を **Euler の記述** という。したがって、

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho dV = \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV, \quad (1.4)$$

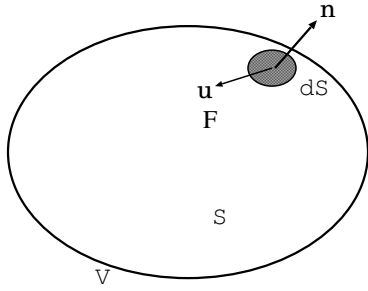


図 1.1: ある体積 V とその表面 S を考える。表面 S の微小な面積 dS をとり、この微小面積の法線ベクトルを \mathbf{n} とし、そこを通過する流体の速度を \mathbf{u} 、あるいは、ある流束 (flux) を \mathbf{F} とする。

となる。

さて、表面を通過して体積 V の中に入って来る質量は、

$$-\oint_S \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS, \quad (1.5)$$

と書ける。ここで、表面の微小部分の面積要素を dS とし、 \mathbf{n} はこの微小表面要素に対して垂直外向きの単位ベクトルである。マイナスの符号は垂直ベクトル \mathbf{n} が外向きで、質量が体積 V の中に入って来る方向 (内向き) とは逆方向となるためである。単位時間に体積 V の中で増える質量と、この中に流れ込んで来る質量とは等しいはずだから、

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV = -\oint_S \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS, \quad (1.6)$$

が成立する。右辺の表面積分は Gauss の発散定理を用いると

$$\oint_S \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS = \int_V \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) dV, \quad (1.7)$$

となるので、結局

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \int_V \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) dV = 0, \quad (1.8)$$

あるいは、

$$\int_V \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) \right) dV = 0, \quad (1.9)$$

となる。これは、任意の体積 V について成立するので、

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) = 0, \quad (1.10)$$

が成り立つことになる。これは **連続の式 (continuity)** あるいは元の意味から **質量保存の式 (mass conservation)** と呼ばれる。

一般に、ある物理量 q があり、この物理量の流束 (flux) が \mathbf{F} と書ける時、ある閉曲面 S で囲まれた体積 V のなかの物理量の単位時間あたりの変化を考えれば、上の連続の式と同様にして、

$$\frac{d}{dt} \int_V q dV = \int_V \frac{\partial q}{\partial t} dV = - \oint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS, \quad (1.11)$$

が成り立ち、上と同様、Gauss の発散定理を用いることで、

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{F} = 0, \quad (1.12)$$

と書ける。このような形式を特に**保存形 (conservative form)** と呼ぶ。連続の式は**非保存形 (nonconservative form)** にもかけて、その場合は

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \operatorname{grad} \rho + \rho \operatorname{div} \mathbf{u} = 0, \quad (1.13)$$

となる。

速度 \mathbf{u} の (x, y, z) 成分が $\mathbf{u} = (u, v, w)$ とかけるとする。体積 V の中の x -方向の運動量の時間変化は

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho u dV = \int_V \frac{\partial}{\partial t} (\rho u) dV, \quad (1.14)$$

となる。粘性を無視できる場合を考える。まず、表面 S を横切って流体が入ってくるので、この流体自身が持って入ってくる、単位体積あたりの x -方向の運動量が ρu なので、表面全体で積分したその量は、

$$- \oint_S (\rho u) (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) dS, \quad (1.15)$$

となる。さらに、表面 S を通して圧力 p が働くので、この項による x -方向の運動量変化は

$$- \oint_S p \mathbf{i} \cdot \mathbf{n} dS, \quad (1.16)$$

となる。ここで、 x -方向の単位ベクトルは $\mathbf{i} = (1, 0, 0)$ 、 y -方向の単位ベクトルは $\mathbf{j} = (0, 1, 0)$ 、 z -方向の単位ベクトルは $\mathbf{k} = (0, 0, 1)$ とおく。さらに、重力のように体積要素にそのままかかる単位質量あたりの力の x -成分を f_x とおけば、この力による x -方向の運動量の増加は、

$$\int_V \rho f_x dV, \quad (1.17)$$

となるので、全体としては、

$$\int_V \frac{\partial}{\partial t} (\rho u) dV = - \oint_S (\rho u) (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) dS - \oint_S p \mathbf{i} \cdot \mathbf{n} dS + \int_V \rho f_x dV, \quad (1.18)$$

が成り立つ。Gauss の発散定理を用いると、圧力による項は

$$- \int_V \operatorname{div}(p \mathbf{i}) dV, \quad (1.19)$$

となり、結局

$$\int_V \left(\frac{\partial}{\partial t} (\rho u) + \operatorname{div}(\rho u \mathbf{u}) + \operatorname{div}(p \mathbf{i}) - \rho f_x \right) dV = 0, \quad (1.20)$$

となる。これは任意の体積 V に対して成り立つから、

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u) + \operatorname{div}(\rho u \mathbf{u} + p \mathbf{i}) = \rho f_x, \quad (1.21)$$

が x -方向の運動量の保存の式、すなわち、 x -方向の運動方程式になる。 y -方向、 z -方向についても同様にして、

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v) + \operatorname{div}(\rho v \mathbf{u} + p \mathbf{j}) = \rho f_y, \quad (1.22)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho w) + \operatorname{div}(\rho w \mathbf{u} + p \mathbf{k}) = \rho f_z, \quad (1.23)$$

が求まる。まとめると、diadic の形式を用いて

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \mathbf{u}) + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u} \mathbf{u} + p \mathbf{I}) = \rho \mathbf{f}, \quad (1.24)$$

あるいは、

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \mathbf{u}) + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u} \mathbf{u}) + \operatorname{grad} p = \rho \mathbf{f}, \quad (1.25)$$

となる。ここで \mathbf{I} は 3×3 の単位行列である。これが、**運動方程式 (equation of motion)** あるいは **運動量保存の式 (momentum conservation)** である。式 (1.25) の第一項の時間微分をばらして、連続の式 (1.10) を代入すると、なじみの非保存形の運動方程式、

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \operatorname{grad}) \mathbf{u} + \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p = \mathbf{f}, \quad (1.26)$$

を得る。

最後に単位体積あたりのエネルギーを e とすると、体積 V 中のエネルギーの時間変化は

$$\frac{d}{dt} \int_V e \, dV = \int_V \frac{\partial e}{\partial t} \, dV, \quad (1.27)$$

となる。これに対応する表面 S からのエネルギーフラックスの流入は、まず、入って来る流体そのものが持っている全エネルギーが

$$- \oint_S e \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \, dS, \quad (1.28)$$

であり、表面 S を通して圧力 p によってなされる仕事が

$$- \oint_S p \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \, dS, \quad (1.29)$$

となり、さらに熱などが表面 S を通して熱伝導などによって流れ込んでくるとすれば、熱流フラックス (heat flux) を \mathbf{q}_h として、

$$- \oint_S \mathbf{q}_h \cdot \mathbf{n} \, dS, \quad (1.30)$$

となる。さらに、重力などの体積要素に直接働く力による仕事量は、

$$\int_V \rho \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} \, dV, \quad (1.31)$$

となるので、全体としては、

$$\int_V \frac{\partial e}{\partial t} dV = - \oint_S e \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS - \oint_S p \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS - \oint_S \mathbf{q}_h \cdot \mathbf{n} dS + \int_V \rho \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} dV, \quad (1.32)$$

となり、いままでと同じように Gauss の発散定理を用いると、

$$\int_V \left(\frac{\partial e}{\partial t} + \operatorname{div}(e \mathbf{u} + p \mathbf{u} + \mathbf{q}_h) - \rho \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} \right) dV = 0, \quad (1.33)$$

となる。任意の体積 V について成立することを考慮して、次の、**エネルギー方程式 (energy equation)**、あるいは**エネルギー保存の式 (energy conservation)**

$$\frac{\partial e}{\partial t} + \operatorname{div}((e + p)\mathbf{u} + \mathbf{q}_h) = \rho \mathbf{f} \cdot \mathbf{u}, \quad (1.34)$$

を得る。エネルギー方程式も非保存形でかけば、

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \operatorname{grad} p + \gamma p \operatorname{div} \mathbf{u} + (\gamma - 1) \operatorname{div} \mathbf{q}_h = 0, \quad (1.35)$$

となる。ここで、理想気体 (**ideal gas**) の状態方程式 (**equation of state**)

$$e = \frac{p}{\gamma - 1} + \frac{1}{2} \rho \mathbf{u}^2, \quad (1.36)$$

を仮定した。これら、粘性のない場合の連続の式、運動方程式、エネルギー方程式を併せて、**オイラー方程式 (Euler equation)** と呼ばれる。

1.2 Euler 方程式のベクトル表示

以下では簡単のために、体積力 \mathbf{f} と熱流 \mathbf{q}_h がないとする。この場合、Euler 方程式はベクトル表示を用いて、

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial E}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial G}{\partial z} = 0, \quad (1.37)$$

という形の保存形でかける。ここで、各ベクトルは、

$$U = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho w \\ e \end{pmatrix}, \quad (1.38)$$

および、

$$E = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u u + p \\ \rho v u \\ \rho w u \\ (e + p)u \end{pmatrix}, F = \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho v v + p \\ \rho w v \\ (e + p)v \end{pmatrix}, G = \begin{pmatrix} \rho w \\ \rho w w + p \\ \rho v w \\ (e + p)w \end{pmatrix}, \quad (1.39)$$

である。

1.3 1次元のオイラー方程式

特に、 x -方向のみを考えた、1次元のオイラー方程式は

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial E}{\partial x} = 0, \quad (1.40)$$

とかけて、各ベクトルは、

$$U = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ e \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u u + p \\ (e + p)u \end{pmatrix}, \quad (1.41)$$

となる。

今後の利便のために、非保存形のオイラー方程式も求めておく。連続の式は

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad (1.42)$$

運動方程式は

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = 0, \quad (1.43)$$

エネルギー保存の式の代わりに圧力に対する式

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \gamma p \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial p}{\partial x} = 0, \quad (1.44)$$

が出て来る。

宿題： 上記の3本の方程式において、 $\rho \rightarrow \rho_0 + \rho'$ 、 $u \rightarrow 0 + u'$ 、 $p \rightarrow p_0 + p'$ と置き換える。 $\rho_0 = \text{一定}$ 、 $p_0 = \text{一定}$ 、および、ダッシュ(′)のついた量を微小量とすると、たとえば、 u' について、線形の波動方程式を導くことができる。その速度が音速となることを示せ。ここで2次以上の微小量は1次の微小量に比べ、十分小さいとして無視してよい。

保存形の量 $(\rho, \rho u, e)$ に対するものと、非保存形の量 (ρ, u, p) に対するものを区別するために、tilde (チルダ) の記号を非保存形のものにはつけることにすると、

$$\frac{\partial \tilde{U}}{\partial t} + \tilde{A} \frac{\partial \tilde{U}}{\partial x} = 0, \quad (1.45)$$

とにおいて、

$$\tilde{U} = \begin{pmatrix} \rho \\ u \\ p \end{pmatrix}, \tilde{A} = \begin{pmatrix} u & \rho & 0 \\ 0 & u & 1/\rho \\ 0 & \gamma p & u \end{pmatrix}, \quad (1.46)$$

となる。いま、 \tilde{U} を U に変換する変換 matrix を M を

$$\frac{\partial U}{\partial x} = M \frac{\partial \tilde{U}}{\partial x}, \quad (1.47)$$

と定義する。さて、 $m = \rho u$ とにおいて、 U の各成分を (ρ, u, p) であらわせば、

$$U = \begin{pmatrix} \rho \\ m \\ e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ p/(\gamma - 1) + \rho u^2/2 \end{pmatrix}, \quad (1.48)$$

となるので、

$$M = \frac{\partial(\rho, m, e)}{\partial(\rho, u, p)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ u & \rho & 0 \\ u^2/2 & \rho u & 1/(\gamma - 1) \end{pmatrix}, \quad (1.49)$$

となる。逆変換 matrix は、 \tilde{U} を (ρ, m, e) であらわすと、

$$\tilde{U} = \begin{pmatrix} \rho \\ u \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho \\ m/\rho \\ (\gamma - 1)(e - m^2/2\rho) \end{pmatrix}, \quad (1.50)$$

となることより、

$$M^{-1} = \frac{\partial(\rho, u, p)}{\partial(\rho, m, e)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -u/\rho & 1/\rho & 0 \\ (\gamma - 1)u^2/2 & -(\gamma - 1)u & \gamma - 1 \end{pmatrix}, \quad (1.51)$$

である。保存形の U を \tilde{U} に変換すると、

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial t} + A \frac{\partial U}{\partial x} &= \frac{\partial U}{\partial \tilde{U}} \frac{\partial \tilde{U}}{\partial t} + A \frac{\partial U}{\partial \tilde{U}} \frac{\partial \tilde{U}}{\partial x} \\ &= M \frac{\partial \tilde{U}}{\partial t} + AM \frac{\partial \tilde{U}}{\partial x} = 0, \end{aligned} \quad (1.52)$$

となり、左から M^{-1} を作用させると、

$$\frac{\partial \tilde{U}}{\partial t} + M^{-1}AM \frac{\partial \tilde{U}}{\partial x} = 0, \quad (1.53)$$

となり、

$$\tilde{A} = M^{-1}AM, \quad (1.54)$$

という関係になる。

宿題： 具体的に matrix A を計算し、上記の関係式 $\tilde{A} = M^{-1}AM$ が成り立つことを示せ。

1.4 Burgers 方程式と KdV 方程式

(1.26) 式の Euler 方程式を 1 次元にすると、

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = 0, \quad (1.55)$$

となり、圧力の効果を見捨ると、

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad (1.56)$$

という形の非線形波動方程式を得る。この方程式の右辺に粘性などの散逸の効果を付け加えると、次の **Burgers 方程式** が得られる。

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (1.57)$$

また、発散項を付け加えると、

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = \mu \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \quad (1.58)$$

という形の **Korteweg-de Vries 方程式**、略して **KdV 方程式** が得られる。これらの簡略化されたモデル方程式はオイラー方程式などの発展方程式の性質を理解するために役に立つ。

第2章 双曲型発展方程式の特徴

ある時刻 t_0 の状態を与えて、それ以後の時刻 $t > t_0$ の状態を求める問題を**初期値問題 (initial value problem)** という。ある初期値に対して時刻 t の解が一意に決まり、初期値のわずかな変化にたいして、解もわずかにしか変化しない場合、この問題を**適切な問題 (well-posed problem)** という。初期値問題が適切な問題である場合にこの系を記述する方程式を**発展方程式 (evolution equation)** という。

発展方程式は偏微分方程式の一種であり、偏微分方程式の型は微分の最高階数の形で決められる。オイラー方程式や、粘性項のない Burgers 方程式、あるいは分散項のない KdV 方程式は、一階の偏微分項しかなく、**双曲型 (hyperbolic)** に分類される。熱伝導の方程式のように空間座標の二階の偏微分項をもつ場合は、**放物型 (parabolic)** に分類される。

2.1 波の追いつきと衝撃波

非粘性 Burgers 方程式 (1.56) の解を考える。これは、背の高さ h の人が背の高さに比例した速さ h で歩くと考えるとわかりやすい。すなわち、初期条件として、いろいろの背の人の分布 $h(x, 0)$ を与えて、その分布のパターンの時間変化を見るとすると、

$$\frac{\partial h}{\partial t} + h \frac{\partial h}{\partial x} = 0, \quad (2.1)$$

という方程式にしたがって分布は変化する。いま、各人の歩く速さは (背の高さによっているので) 時間的に一定である。つまり、

$$\frac{dx}{dt} = h, \quad (2.2)$$

で決まる特性線は、各人の歩った軌跡をあらわし、特性線に沿って、歩く速度は一定なので、時間についてすぐに積分できて、

$$x = h(\xi, 0)t + \xi, \quad (2.3)$$

となる。ここで、 $h(\xi, 0)$ は $t = 0$ に $x = \xi$ の位置にいる人の背の高さである。すなわち、初期条件を与える。

いま、 $x = h(\xi_1, 0)t + \xi_1$ と $x = h(\xi_2, 0)t + \xi_2$ という二つの特性線を考える。 $\xi_1 < \xi_2$ で、かつ $h(\xi_1, 0) > h(\xi_2, 0)$ である場合、わかりやすくいえば、後ろの人が背が高い場合、時刻 $t = (\xi_2 - \xi_1) / (h(\xi_1, 0) - h(\xi_2, 0))$ で二人の x -座標が一致する。つまり、後ろの人が前の人に追い付く。式 (1.56) で表せるような非線形波動方程式に従う波は必然的に波の追いつき、追い越しがおきてしまう。この場合、粒子系のように、後ろの粒子が前の粒子を

追い越していってしまう場合もあるが、流体のように後ろのものが前のものにぶつかってしまっただけで追い越せない場合は、車の衝突のように運動エネルギーが車の変形の仕事に使われて、後の車は激しく減速をうける。流体の運動では、運動エネルギーが内部の熱エネルギーに粘性散逸を通して変換される。このような現象を**衝撃波 (shock wave)**と呼ぶ。

さて、ひとつの例として、初期条件が

$$h(x, 0) = \begin{cases} 1, & (x \leq -a) \\ -x/a, & (-a \leq x \leq 0) \\ 0, & (0 \leq x) \end{cases} \quad (2.4)$$

で与えられる場合を考えると、 $t = 0$ から出ていく特性曲線は次の3つのグループに分けられる。

$$(I) \quad x = t + \xi, \quad (\xi \leq -a) \quad (2.5)$$

$$(II) \quad x = -\frac{\xi}{a}t + \xi, \quad (-a \leq \xi \leq 0) \quad (2.6)$$

$$(III) \quad x = \xi, \quad (0 \leq \xi) \quad (2.7)$$

ここで、第2群の直線はすべて $t = a$ で $x = 0$ を通る。すなわち追いつきによりこの1点に集中する。このとき、

$$h(x, a) = \begin{cases} 1, & (x < 0) \\ 0, & (0 < x) \end{cases} \quad (2.8)$$

となり、 $x = 0$ で不連続になる。

2.2 Burgers 方程式の解と衝撃波の構造

実際の流体では、波の追い越しは起きない。粘性による散逸効果が働き、衝撃波が発生する。衝撃波の性質を粘性項の入った Burgers 方程式を使って解析的に調べることができる。 u が $x \rightarrow \pm\infty$ で一定状態 $u_{\pm\infty}$ に漸近的に近づくとする。また、 λ を定数として u が $x - \lambda t = x'$ のみの関数とすると、式 (1.57) は

$$(-\lambda) \frac{\partial u}{\partial x'} + u \frac{\partial u}{\partial x'} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x'^2} \quad (2.9)$$

となる。ここで、追い越しが起きる条件として、

$$u_{-\infty} > u_{+\infty}, \quad (2.10)$$

である。さらに $u' = u - \lambda$ とおけば、

$$u' \frac{\partial u'}{\partial x'} = \mu \frac{\partial^2 u'}{\partial x'^2} \quad (2.11)$$

とかけて、 x' について積分できるので、

$$\frac{1}{2} u'^2 + C = \mu \frac{\partial u'}{\partial x'} \quad (2.12)$$

となる。 $x' \rightarrow +\infty$ での微分はゼロになるから、積分定数は

$$C = -\frac{1}{2}u'_{+\infty}, \quad (2.13)$$

と求まり、

$$\int dx' = 2\mu \int \frac{du'}{u'^2 - u'_{+\infty}{}^2}, \quad (2.14)$$

を積分すれば、

$$x' + D = \frac{\mu}{u'_{+\infty}} \ln \left(\frac{|u' - u'_{+\infty}|}{|u' + u'_{+\infty}|} \right), \quad (2.15)$$

となる。 $x' \rightarrow +\infty$ で $u' \rightarrow u'_{+\infty}$ で、かつ、 $\mu > 0$ より、

$$u'_{+\infty} < 0, \quad (2.16)$$

でなければならない。さらに、 $x' \rightarrow -\infty$ で $u' \rightarrow u'_{-\infty}$ となることを考えると、(2.15) 式の右辺の分母がゼロにならない。この条件より、

$$u'_{-\infty} = -u'_{+\infty} > 0, \quad (2.17)$$

が導かれ、かつ、 x' について u' が反対称であること ($x' \rightarrow -x'$ の時、 $u' \rightarrow -u'$ とすれば、式 (2.12) が満たされる) を使うと、 $D = 0$ でなければならない。

結局、

$$u' = u'_{+\infty} \tanh \left(-\frac{u'_{+\infty} x'}{2\mu} \right), \quad (2.18)$$

が求める解となる。式 (2.17) に関係式 $u' = u - \lambda$ を代入すると、

$$\lambda = \frac{1}{2}(u_{+\infty} + u_{-\infty}), \quad (2.19)$$

となる。また、

$$u'_{+\infty} = u_{+\infty} - \lambda < 0 \quad (2.20)$$

$$u'_{-\infty} = u_{-\infty} - \lambda > 0 \quad (2.21)$$

であることに注意。

この場合の衝撃波の幅は、おおよそ

$$\Delta x \sim \frac{2\mu}{|u'_{+\infty}|} = \frac{4\mu}{u_{-\infty} - u_{+\infty}}, \quad (2.22)$$

と考えて良い。衝撃波前後の波の速度の差が大きければ大きい程、減衰は激しく、粘性係数が小さいほど衝撃波の幅は小さくなる。速度 λ で進む系に乗って見た時、波は定常、つまり、衝撃波は停止しているように見えるので、衝撃波の伝わる速度は λ であるとみなせる。さらに、衝撃波前後の条件をまとめると、

(I) 衝撃波の速度 λ は衝撃波が伝わる前方の状態に対する特性速度 $u_{+\infty}$ より大きい、すなわち、

$$\lambda > u_{+\infty}, \quad (2.23)$$

(II) 衝撃波の後方のながれに対する特性速度 $u_{-\infty}$ は λ と $u_{+\infty}$ によって一意的に決まる。すなわち、

$$u_{-\infty} = 2\lambda - u_{+\infty}, \quad (2.24)$$

であり、

$$u_{-\infty} - \lambda = \lambda - u_{+\infty} > 0, \quad (2.25)$$

となるので、後流の特性速度は衝撃波の速度より大きい。つまり、衝撃波のまえでは、超音速であり、うしろでは亜音速であるというよく知られた事実を表している。

2.3 非線形波動方程式の強い解と弱い解

Burgers 方程式 (1.57) で $\mu \rightarrow 0$ の極限をとれば、解 (2.18) は $x' = 0$ での跳びを持つ階段関数となる。厳密にはこの点での微分が定義できないので、微分方程式を満たさない。しかし、ある点で跳びをゆるすように解を拡張することを考える。まず、ある閉じた時空の領域でだけ有限の値を持ち、無限回微分可能な関数 $w(x, t)$ を考える。任意の $w(x, t)$ に対して、

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dt \int_{-\infty}^{+\infty} dx \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} \right) w(x, t) = 0, \quad (2.26)$$

を満たすならば、この u をも解だとみなすのである。(このような関数 $w(x, t)$ を support という。) 部分積分を実行すると、

$$- \int_{-\infty}^{+\infty} dt \int_{-\infty}^{+\infty} dx \left(u \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{u^2}{2} \frac{\partial w}{\partial x} \right) = 0, \quad (2.27)$$

となる。また、 $w(x, \pm\infty) = 0$ や $w(\pm\infty, t) = 0$ を用いた。

さて、式 (2.27) は u に関する微分を含まないので、不連続な u に対しても使える。任意のテスト関数 w に対して、式 (2.27) が成り立つことを要求すれば、 u に対する方程式となる。このような、式 (2.27) を満たす解を**弱い解 (weak solution)** という。もし u が1回微分可能な、なめらかな関数であれば、逆にたどって、式 (1.56) を直接満たすことは明らかである。式 (2.27) を満たすなめらかな解を弱い解に対して、**強い解 (strong solution)** と呼ぶ。

弱い解をこのように定義すると、 $\mu \rightarrow 0$ の極限で求まる階段関数は式 (1.56) の弱い解と考えることができる。しかしながら、解を拡張したために解の一意性が失われる。以下でこのことの実例を示す。例えば、

$$u(x, 0) = \begin{cases} u_1, & (x < 0) \\ u_2, & (x > 0) \end{cases} \quad (2.28)$$

なる、階段関数で与えられる初期条件に対する解を求める。 λ が一定だとして、

$$u(x, t) = \begin{cases} u_1, & (x - \lambda t < 0; \text{ region A}) \\ u_2, & (x - \lambda t > 0; \text{ region B}) \end{cases} \quad (2.29)$$

とおくと、それぞれの領域では式 (1.56) を満たす。これを、式 (2.27) に入れて、ある領域の面積積分をそれを囲む閉曲線に沿っての線積分に変換する。無限遠での w の値はゼロになる。 $x - \lambda t = 0$ に沿っての値のみが残ってくるので、

$$\begin{aligned} & - \int \int_{A+B} \left(u \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{u^2}{2} \frac{\partial w}{\partial x} \right) dx dt \\ &= -u_1 \int \int_A \frac{\partial w}{\partial t} dx dt - u_2 \int \int_B \frac{\partial w}{\partial t} dx dt \\ & \quad - \frac{u_1^2}{2} \int \int_A \frac{\partial w}{\partial x} dx dt - \frac{u_2^2}{2} \int \int_B \frac{\partial w}{\partial x} dx dt \end{aligned} \quad (2.30)$$

となる。ここで、Stokes の定理、

$$\int \int_S \text{rot } \mathbf{a} \, dS = \oint_C \mathbf{a} \cdot d\mathbf{s}, \quad (2.31)$$

を (x, y) 成分で書けば、

$$\int \int_S \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \right) dS = \oint_C (a_x n_1 + a_y n_2) ds, \quad (2.32)$$

となる。ここで、 C は領域 A と B を囲む閉曲線を表す。しかし、実際にゼロでない値を持つのは、

$$x - \lambda t = 0, \quad (2.33)$$

の直線に沿った部分のみであるから、結局は、この直線に沿った積分を表すことになる。この直線に沿った単位ベクトルは、

$$\mathbf{n} = (n_1, n_2) = (\lambda/\sqrt{1+\lambda^2}, 1/\sqrt{1+\lambda^2}), \quad (2.34)$$

となる。Stokes の定理を使って、 y を t に入れ換えて、 $a_x = -w$ および、 $a_y = 0$ を代入すれば、最初の項は、

$$-u_1 \int \int_A \frac{\partial w}{\partial t} dx dt = -u_1 \int_C (-w) n_1 ds, \quad (2.35)$$

となる。同様に、 $a_x = -w$ および、 $a_y = 0$ を代入すれば、2番目の項は、

$$-u_2 \int \int_B \frac{\partial w}{\partial t} dx dt = -u_2 \int_C (-w) (-n_1) ds, \quad (2.36)$$

となる。ここで、 C については逆方向から線積分することに注意。今度は、 $a_x = 0$ および、 $a_y = w$ を代入すれば、3番目の項は、

$$-\frac{u_1^2}{2} \int \int_A \frac{\partial w}{\partial x} dx dt = -\frac{u_1^2}{2} \int_C w n_2 ds, \quad (2.37)$$

となる。同様に、 $a_x = 0$ および、 $a_y = w$ を代入すれば、4番目の項は、

$$-\frac{u_2^2}{2} \int \int_B \frac{\partial w}{\partial x} dx dt = +\frac{u_2^2}{2} \int_C w n_2 ds, \quad (2.38)$$

となる。これに、

$$n_1 = \lambda n_2, \quad (2.39)$$

の関係をいれると、最終的に

$$\begin{aligned} & \lambda(u_1 - u_2) \int_C w n_2 ds - \left(\frac{u_1^2}{2} - \frac{u_2^2}{2} \right) \int_C w n_2 ds \\ &= \left(\lambda[u] - \left[\frac{u^2}{2} \right] \right) \int_C w n_2 ds \end{aligned} \quad (2.40)$$

となる。ここで、

$$[u] = u_1 - u_2, \quad (2.41)$$

$$\left[\frac{u^2}{2} \right] = \frac{u_1^2}{2} - \frac{u_2^2}{2}, \quad (2.42)$$

である。したがって、任意の $w(x, t)$ に対して成り立つためには、

$$\lambda[u] = \left[\frac{u^2}{2} \right], \quad (2.43)$$

でなければならない。これより、衝撃波の速度

$$\lambda = \frac{1}{2}(u_1 + u_2), \quad (2.44)$$

を得る。これで、 $x - \lambda t = 0$ で不連続な弱い解が求められた。これは、衝撃波に対する条件 (II) と同じものである。

さて、 $u_1 > u_2 (> 0)$ なら、もう一つの条件 (I) も満たされている。したがって、上の弱い解は Burgers 方程式の $\mu \rightarrow 0$ の極限になっている。しかし、問題は $u_1 < u_2$ の場合に生じる。この場合には、上記の階段関数以外に、

$$u(x, t) = \begin{cases} u_1, & (x < u_1 t) \\ x/t, & (u_1 t < x < u_2 t) \\ u_2, & (x > u_2 t) \end{cases} \quad (2.45)$$

という $t > 0$ で連続な解 (膨張波) が存在する。これは、強い解でもある。したがって、この場合には同一の初期条件を満足し、式 (2.27) を満たす解が二つ存在することになり、解の一意性が損なわれる。このうち階段関数で与えられる解は $\lambda = u_2 - (u_2 - u_1)/2 < u_2$ となり、衝撃波の条件 (I) を満たしていない。もともと式 (2.43) は不連続解の前後の物理量の保存則から導かれるもので、一般に shock condition あるいは Rankine-Hugoniot (ランキン-ユゴニオ) の関係といわれるものである。しかし、これだけでは衝撃波解を正しく捉えることができないので、衝撃波の条件 (I) に対応するエントロピー条件 (衝撃波の後ろでエントロピーが増大する) を課して正しい解を得る。

実際の数値流体力学においても、膨張衝撃波と呼ばれるものが現れることがある。この場合は、なんらかの形の数値粘性を導入してエントロピーを人工的に増大させるような仕掛けをほどこす必要がある。

2.4 衝撃波と Rankine-Hugoniot の関係式

1次元のオイラー方程式についても、任意の $w(x, t)$ に対して、

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dt \int_{-\infty}^{+\infty} dx \left(\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} \right) w(x, t) = 0, \quad (2.46)$$

を考えると、

$$- \int_{-\infty}^{+\infty} dt \int_{-\infty}^{+\infty} dx \left(U \frac{\partial w}{\partial t} + F \frac{\partial w}{\partial x} \right) = 0, \quad (2.47)$$

と弱い解を含むように拡張できるので、衝撃波の速度を λ とし、 $x - \lambda t = \text{一定}$ とし、式 (2.40) と同様にして、

$$\begin{aligned} & - \int \int_{A+B} \left(U \frac{\partial w}{\partial t} + F \frac{\partial w}{\partial x} \right) dx dt \\ & = -(-\lambda[U] + [F]) \int_C w n_2 ds = 0, \end{aligned} \quad (2.48)$$

を得る。任意の $w(x, t)$ について成り立つことから、

$$-\lambda[U] + [F] = 0, \quad (2.49)$$

という**衝撃波の跳びに関する条件 (jump condition)** が出て来る。

衝撃波と共に動く系からみると、 $\lambda = 0$ とおけるので、(2.49) は、

$$[F] = 0, \quad (2.50)$$

となる。いま、衝撃波前方の物理量を 2 で、後方の物理量を 1 で表すとすると、(2.50) の第 1 成分は、

$$\rho_2 u_2 - \rho_1 u_1 = 0, \quad (2.51)$$

となり、第 2 成分は、

$$\rho_2 u_2^2 + p_2 - \rho_1 u_1^2 - p_1 = 0, \quad (2.52)$$

となり、第 3 成分は

$$(e_2 + p_2)u_2 - (e_1 + p_1)u_1 = 0, \quad (2.53)$$

となる。(2.51) と (2.52) より、

$$u_2^2 - u_1^2 = \frac{p_1}{\rho_2} + \frac{p_1}{\rho_1} - \frac{p_2}{\rho_1} - \frac{p_2}{\rho_2}, \quad (2.54)$$

が出て来る。また、

$$(e + p)u = \rho u \left(\frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p}{\rho} + \frac{1}{2} u^2 \right), \quad (2.55)$$

という関係を使えば、(2.53) は

$$u_2^2 - u_1^2 = -\frac{2\gamma}{\gamma - 1} \left(\frac{p_2}{\rho_2} - \frac{p_1}{\rho_1} \right), \quad (2.56)$$

となるので、右辺同士を等しいとして、

$$\frac{p_2 - p_1}{\rho_2} + \frac{p_2 - p_1}{\rho_1} = \frac{2\gamma}{\gamma - 1} \left(\frac{p_2}{\rho_2} - \frac{p_1}{\rho_1} \right), \quad (2.57)$$

とおけるので、最終的に

$$\left(\frac{\rho_1}{\rho_2} - \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} \right) \left(\frac{p_1}{p_2} + \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} \right) = -\frac{4\gamma}{(\gamma - 1)^2}, \quad (2.58)$$

の **Rankine-Hugoniot の関係式** を得る。また、(2.52) より、

$$\frac{p_1}{p_2} - 1 = \gamma M_2^2 \left(1 - \frac{\rho_2}{\rho_1} \right), \quad (2.59)$$

を得るので、これを Rankine-Hugoniot の式かその前段階の式に入れて、 ρ_2/ρ_1 あるいは、 p_1/p_2 の2次方程式として解けば、

$$\frac{p_1}{p_2} = 1 + \frac{2\gamma}{\gamma + 1} (M_2^2 - 1), \quad (2.60)$$

を得る。 $p_1/p_2 = 1$ の自明の解は採用しない。ここで、

$$M_2 = \frac{u_2}{c_2}, \quad (2.61)$$

であり、衝撃波上流のマッハ数である。この式は、衝撃波上流のマッハ数が与えられれば衝撃波をはさむ圧力の比が一意的に与えられることを示す。同様にして、(2.51) より、

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = 1 - \frac{2}{\gamma + 1} \frac{M_2^2 - 1}{M_2^2}, \quad (2.62)$$

となり、密度比が決まる。同じように、(2.52) より、

$$\frac{p_2}{p_1} - 1 = \gamma M_1^2 \left(1 - \frac{\rho_1}{\rho_2} \right), \quad (2.63)$$

を使えば、

$$M_1^2 = 1 - \frac{(\gamma + 1)(M_2^2 - 1)}{2\gamma M_2^2 - (\gamma - 1)}, \quad (2.64)$$

の関係式を得る。

したがって、上流でのマッハ数が無限大となるような strong shock の極限では、

$$\frac{p_1}{p_2} \longrightarrow \infty, \quad \frac{\rho_2}{\rho_1} \longrightarrow \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1}, \quad M_1^2 = \frac{\gamma - 1}{2\gamma}, \quad (2.65)$$

となる。

2.5 特性線と単純波

1次元オイラー方程式のような双曲型発展方程式は、一般に保存形の形で、

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} = 0, \quad (2.66)$$

$$U = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ u_n \end{pmatrix}, F = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ f_n \end{pmatrix} \quad (2.67)$$

と書ける。ここで、 U と F は n -成分の縦ベクトルである。この方程式は非保存形で書くと、

$$\frac{\partial U}{\partial t} + A \frac{\partial U}{\partial x} = 0, \quad (2.68)$$

$$A \equiv \frac{\partial F}{\partial U} = \frac{\partial(f_1, f_2, \dots, f_n)}{\partial(u_1, u_2, \dots, u_n)}, \quad (2.69)$$

となる。ここで、 A は $n \times n$ の Jacobian Matrix である。双曲型発展方程式であれば、 A の固有値はすべて実数になる。逆に、 A の固有値がすべて実数の場合、(2.68) 式は偏微分方程式の分類からいうところの双曲型になる。 n 個の固有値 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ をこの方程式系の**特性速度 (characteristic velocity)** といい、

$$\frac{dx}{dt} = \lambda_k, (k = 1, \dots, n) \quad (2.70)$$

で決まる (x, t) -空間の軌跡を**特性線 (characteristics)** という。特性速度 λ_k ($k = 1, \dots, n$) で伝わる波を**単純波 (simple wave)** という。

いま、固有値 λ_k に対応する特性線群を、 $\phi_k(x, t) = \xi$ のようにパラメータ ξ により陰関数表示で表すと、特性線に沿って ϕ_k の値は一定 (すなわち ξ) だから、

$$0 = d\phi_k = \frac{\partial \phi_k}{\partial t} dt + \frac{\partial \phi_k}{\partial x} dx = \left(\frac{\partial \phi_k}{\partial t} + \frac{\partial \phi_k}{\partial x} \frac{dx}{dt} \right) dt \quad (2.71)$$

となり、 $dt \neq 0$ だから、(2.70) を代入して

$$\frac{\partial \phi_k}{\partial t} + \lambda_k \frac{\partial \phi_k}{\partial x} = 0, \quad (2.72)$$

が成り立つ。もはや、この波動方程式においては、 $\phi_k(x, 0)$ のパターンが特性速度 λ_k で伝播していく様子を表しているということに注意して欲しい。特定の $\phi_k(x, t) = \xi$ という特性線に沿っての変化のみをみているのではない。単純波は n 個のモードのうち、ひとつのモードのみを持つ波と考えられる。 λ_k に対応する単純波 U_k はその定義より、

$$\frac{\partial U_k}{\partial t} + \lambda_k \frac{\partial U_k}{\partial x} = 0, \quad (2.73)$$

とかけ、特性線 (2.70) に沿っての U_k の変化 dU_k は、

$$dU_k = \frac{\partial U_k}{\partial t} dt + \frac{\partial U_k}{\partial x} dx$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\frac{\partial U_k}{\partial t} + \frac{\partial U_k}{\partial x} \frac{dx}{dt} \right) dt \\
&= \left(\frac{\partial U_k}{\partial t} + \lambda_k \frac{\partial U_k}{\partial x} \right) dt = 0,
\end{aligned} \tag{2.74}$$

となるので、 U_k は特性線 (2.70) に沿って、一定になる。従って、 U_k は ϕ_k のみの関数

$$U_k = U_k(\phi_k), \tag{2.75}$$

とおける。この場合、双曲型波動方程式 (2.68) は一般に (特性線に沿ってという意味ではないことに注意)、

$$\frac{\partial \phi_k}{\partial t} \frac{\partial U_k}{\partial \phi_k} + A \frac{\partial \phi_k}{\partial x} \frac{\partial U_k}{\partial \phi_k} = \left(\frac{\partial \phi_k}{\partial t} + A \frac{\partial \phi_k}{\partial x} \right) \frac{\partial U_k}{\partial \phi_k} = 0, \tag{2.76}$$

となり、単純波の満たす式 (2.72) を代入すると、

$$(A - \lambda_k I) \frac{\partial \phi_k}{\partial x} \frac{\partial U_k}{\partial \phi_k} = 0, \tag{2.77}$$

とかける。 $\partial \phi_k / \partial x \neq 0$ を使えば、

$$(A - \lambda_k I) \frac{\partial U_k}{\partial \phi_k} = 0, \tag{2.78}$$

となる。したがって、 R_k を matrix A の固有値 λ_k に対する右固有ベクトルとすると、

$$\frac{\partial U_k}{\partial \phi_k} \propto R_k, \tag{2.79}$$

となっている。この関係は、 ϕ_k の増える方向、つまり、特性線に垂直に特性線を横切る方向に、 dU_k がどう変化するかを与える関係式である。いま、簡単のために比例係数を 1 とおいて得られる式、

$$dU_k - R_k d\phi_k = 0, \tag{2.80}$$

の積分 (不定積分) が存在すれば、その量

$$\int (dU_k - R_k d\phi_k) = \text{constant}, \tag{2.81}$$

は特性線 $\phi_k(x, t) = \xi$ を横切って保存する量になる。

次に、 L_m を matrix A の固有値 λ_m に対する左固有ベクトルとすると、

$$\begin{aligned}
0 &= L_m \left(\frac{\partial U}{\partial t} + A \frac{\partial U}{\partial x} \right) \\
&= L_m \frac{\partial U}{\partial t} + L_m A \frac{\partial U}{\partial x} \\
&= L_m \left(\frac{\partial U}{\partial t} + \lambda_m \frac{\partial U}{\partial x} \right),
\end{aligned} \tag{2.82}$$

となるが、特性線 $\phi_m(x, t) = \xi$ に沿っての微分を $d\sigma$ とおけば、

$$L_m \left(\frac{dU}{d\sigma} \right) = L_m \left(\frac{\partial U}{\partial t} \frac{\Delta t}{\Delta \sigma} + \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\Delta x}{\Delta \sigma} \right)$$

$$\begin{aligned}
&= L_m \left(\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\Delta x}{\Delta t} \right) \frac{\Delta t}{\Delta \sigma} \\
&= L_m \left(\frac{\partial U}{\partial t} + \lambda_m \frac{\partial U}{\partial x} \right) \frac{\Delta t}{\Delta \sigma} \\
&= 0,
\end{aligned} \tag{2.83}$$

となる。ここで、上の関係式と特性線に沿っては、 $\Delta x/\Delta t = \lambda_m$ であることを使った。したがって、この関係式を積分(不定積分)できれば、

$$\int L_m dU = \text{constant}, \tag{2.84}$$

という量が求まり、特性線に沿って保存される。このような量をリーマン不変量 (Riemann invariants) という。

スカラーの非線形波動方程式 (1.56) についてのリーマン不変量は、 $L_1 = 1$ で、 $dU = du$ となるので、特性線に沿って $u = \text{一定}$ となり、 u がリーマン不変量になる。これは、(2.1) と (2.2) とから明らかだろう。

2.6 等エントロピー流れとリーマン不変量

次に、2成分系のモデルとして、等エントロピー流れを考える。Entropy が一定なので、状態方程式は

$$p = K\rho^\gamma, \tag{2.85}$$

とかける。したがって、エネルギーに関するエネルギー保存の式はいらなくなる。さらに、非保存形で表現すると、

$$\frac{\partial \tilde{U}}{\partial t} + \tilde{A} \frac{\partial \tilde{U}}{\partial x} = 0, \tag{2.86}$$

として、

$$\tilde{U} = \begin{pmatrix} \rho \\ u \end{pmatrix}, \tilde{A} = \begin{pmatrix} u & \rho \\ \gamma K \rho^{\gamma-2} & u \end{pmatrix}, \tag{2.87}$$

となる。この系に対して固有値を求めて見ると、

$$|\tilde{A} - \lambda I| = \begin{vmatrix} u - \lambda & \rho \\ c^2/\rho & u - \lambda \end{vmatrix} = 0, \tag{2.88}$$

となり、

$$\lambda_1 = u - c, \tag{2.89}$$

$$\lambda_2 = u + c, \tag{2.90}$$

のふたつの固有値が求まる。このふたつの固有値に対して左固有ベクトルは、

$$\tilde{L}_1 = (c/\rho, -1) \tag{2.91}$$

$$\tilde{L}_2 = (c/\rho, 1) \tag{2.92}$$

となる。これより、リーマンの不変量を求めて見ると、

$$\tilde{L}_1 d\tilde{U} = c \frac{d\rho}{\rho} - du = 0, \quad (2.93)$$

$$\tilde{L}_2 d\tilde{U} = c \frac{d\rho}{\rho} + du = 0, \quad (2.94)$$

を積分して、

$$\frac{2c}{\gamma-1} - u = \text{constant}, \quad (\lambda_1 = u - c) \quad (2.95)$$

$$\frac{2c}{\gamma-1} + u = \text{constant}, \quad (\lambda_2 = u + c) \quad (2.96)$$

となる。仮に、 $\lambda_1 = u - c$ に対する特性線上の点 A での状態がわかっているとし、かつ、 $\lambda_2 = u + c$ に対する特性線上の点 B での状態がわかっているとすると、ふたつの特性線の交点 C での物理量は、

$$\frac{2c_A}{\gamma-1} - u_A = \frac{2c_C}{\gamma-1} - u_C, \quad (2.97)$$

$$\frac{2c_B}{\gamma-1} + u_B = \frac{2c_C}{\gamma-1} + u_C, \quad (2.98)$$

より、

$$c_C = \frac{1}{2}(c_A + c_B) + \frac{\gamma-1}{4}(u_B - u_A), \quad (2.99)$$

$$u_C = \frac{1}{2}(u_A + u_B) + \frac{c_B - c_A}{\gamma-1}, \quad (2.100)$$

として、計算できる。

2.7 1次元オイラー方程式と一般化されたリーマン不変量

3成分系の1次元オイラー方程式を非保存形で表現すると、

$$\frac{\partial \tilde{U}}{\partial t} + \tilde{A} \frac{\partial \tilde{U}}{\partial x} = 0, \quad (2.101)$$

とにおいて、

$$\tilde{U} = \begin{pmatrix} \rho \\ u \\ p \end{pmatrix}, \quad \tilde{A} = \begin{pmatrix} u & \rho & 0 \\ 0 & u & 1/\rho \\ 0 & \gamma p & u \end{pmatrix}, \quad (2.102)$$

となることは、1章で述べた。これに対する固有値を求めると、

$$|\tilde{A} - \lambda I| = \begin{vmatrix} u - \lambda & \rho & 0 \\ 0 & u - \lambda & 1/\rho \\ 0 & \rho c^2 & u - \lambda \end{vmatrix} = 0, \quad (2.103)$$

となり、

$$\lambda_1 = u - c, \quad \lambda_2 = u, \quad \lambda_3 = u + c, \quad (2.104)$$

の3つの固有値が出て来る。この3つの固有値に対する左固有ベクトルは

$$\tilde{L}_1 = (0, 1, -\frac{1}{\rho c}), \quad \tilde{L}_2 = (1, 0, -\frac{1}{c^2}), \quad \tilde{L}_3 = (0, 1, \frac{1}{\rho c}) \quad (2.105)$$

となり、右固有ベクトルは

$$\tilde{R}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -c/\rho \\ c^2 \end{pmatrix}, \quad \tilde{R}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{R}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ c/\rho \\ c^2 \end{pmatrix}, \quad (2.106)$$

となる。この左固有ベクトルに対するリーマン不変量を与える微分式は

$$\tilde{L}_1 d\tilde{U} = du - \frac{dp}{\rho c} = 0, \quad (2.107)$$

$$\tilde{L}_2 d\tilde{U} = d\rho - \frac{dp}{c^2} = 0, \quad (2.108)$$

$$\tilde{L}_3 d\tilde{U} = du + \frac{dp}{\rho c} = 0, \quad (2.109)$$

となる。2番目の式 (2.108) については不定積分が存在して、

$$\ln \left(\frac{P}{\rho^\gamma} \right) = \text{constant}, \quad (2.110)$$

が求まるが、1番目と3番目のものに対しては、 c が p と ρ の関数なので、積分ができない。したがって、特性線に沿って一定となるような積分量が存在しない。この意味では、3成分以上の多成分系の双曲型発展方程式ではリーマン不変量は存在しない。しかし、式 (2.81) で与えられるような積分量が存在すれば、特性線を横切って保存される(一定である)量が定義できる。ここで、式 (2.80) での $d\phi$ は特性線に垂直な方向への微分を表していることに注意。

まず、 $\lambda_1 = u - c$ に対する式は、

$$d\tilde{U} = \begin{pmatrix} d\rho \\ du \\ dp \end{pmatrix} = \tilde{R}_1 d\phi = \begin{pmatrix} 1 \\ -c/\rho \\ c^2 \end{pmatrix} d\phi, \quad (2.111)$$

となるので、最初の行での関係式 $d\rho = d\phi$ を使って、

$$du + \frac{c}{\rho} d\rho = 0, \quad (2.112)$$

$$dp - c^2 d\rho = 0, \quad (2.113)$$

が出て来る。式 (2.113) は簡単に積分できて、

$$\frac{P}{\rho^\gamma} = K(\text{constant}), \quad (2.114)$$

となる。この関係式を使えばもう一方も積分できて、

$$u + \frac{2c}{\gamma - 1} = \text{constant}, \quad (2.115)$$

となる。

次に、 $\lambda_2 = u$ に対する式は、

$$d\tilde{U} = \begin{pmatrix} d\rho \\ du \\ dp \end{pmatrix} = \tilde{R}_2 d\phi = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} d\phi, \quad (2.116)$$

となるので、

$$du = 0, \quad (2.117)$$

$$dp = 0, \quad (2.118)$$

が出て来る。これらはすぐに積分できて、

$$P = \text{constant}, \quad u = \text{constant}, \quad (2.119)$$

が特性線を横切って保存する量となる。

最後に、 $\lambda_3 = u + c$ に対する式は、

$$d\tilde{U} = \begin{pmatrix} d\rho \\ du \\ dp \end{pmatrix} = \tilde{R}_3 d\phi = \begin{pmatrix} 1 \\ c/\rho \\ c^2 \end{pmatrix} d\phi, \quad (2.120)$$

となるので、

$$du - \frac{c}{\rho} d\rho = 0, \quad (2.121)$$

$$dp - c^2 d\rho = 0, \quad (2.122)$$

となり、上と同じように積分すると、

$$\frac{P}{\rho^\gamma} = \text{constant}, \quad (2.123)$$

$$u - \frac{2c}{\gamma - 1} = \text{constant}, \quad (2.124)$$

となる。これらの一般化されたリーマン不変量を用いると、次の節で議論するが、跳びが無限小の場合のリーマン問題の解を求めることができる。

2.8 リーマン問題としての衝撃波管問題

二つの異なった一定状態からなる不連続分布を初期条件に持つ初期値問題をリーマン問題 (Riemann problem) と呼ぶ。リーマン問題の典型的な例としての衝撃波管問題 (shock tube problem) をここでは取り扱う。

衝撃波管問題は、左側に密度と圧力の高い状態を、右側に密度と圧力の低い状態を用意しておき、その二つを仕切る壁をある瞬間に取り去った後の流体の時間発展を求める問題である。右側の方向を x -軸にとれば、 x -軸の正の方向へ衝撃波 (shock wave) が伝わり、 x -軸の負の方向へは膨張波 (expansion wave) が伝わる。その間に、エントロピーの値が異なる二つの状態が接している接触不連続面 (contact surface) が x -軸の正の方向に伝播していく。初期条件として、

$$\tilde{U} = \begin{pmatrix} \rho_1 \\ u_1 \\ p_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.0 \\ 0 \\ 1.0 \end{pmatrix}, \quad (0 < x < 0.5) \quad (2.125)$$

$$\tilde{U} = \begin{pmatrix} \rho_4 \\ u_4 \\ p_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.125 \\ 0 \\ 0.1 \end{pmatrix}, \quad (0.5 < x < 1) \quad (2.126)$$

を考える。なお、考える気体は空気だとして、 $\gamma = 1.4$ をとる。時刻 $t = 0.14154$ の各物理量の空間分布は 1 次元の数値コードのテスト問題として、Sod により提案されて以来、良く使われている。この初期条件から始まり、この時刻の計算結果を出して、解析的な解と比較することは、Sod's problem と呼ばれる。

ある時刻 $t = 0.14154$ の管内の状態は、右から順番に shock wave, contact surface, expansion wave の後端、expansion wave の先端という風になっている。各状態の物理量に左側から順番に番号を振ると、expansion wave がまだ来ていない、擾乱のない状態が 1 となり、 (ρ_1, u_1, p_1) とあらわせて、expansion fan を経て、expansion wave の後端の状態が 2 となり、 (ρ_2, u_2, p_2) となっている。次に、contact surface があり、その右側の状態の番号を 3 とすると、 (ρ_3, u_3, p_3) となり、最後に shock wave が来て、その右側の状態が、擾乱のない 4 番の状態で、 (ρ_4, u_4, p_4) とおける。

shock wave の速度を λ とすると、衝撃波の上流側のマッハ数は

$$M_4 = \frac{\lambda}{c_4}, \quad (2.127)$$

とおけて、衝撃波下流側のマッハ数は

$$M_3 = \frac{\lambda - u_3}{c_3}, \quad (2.128)$$

とかける。(2.60) より、

$$M_4^2 = 1 + \frac{\gamma + 1}{2\gamma} \left(\frac{p_3}{p_4} - 1 \right), \quad (2.129)$$

となるので、これを上の (2.127) 式に入れて、

$$\lambda = c_4 \sqrt{\frac{\gamma - 1}{2\gamma} + \frac{\gamma + 1}{2\gamma} \frac{p_3}{p_4}}, \quad (2.130)$$

を得る。また、(2.49) より、

$$-\lambda(\rho_4 - \rho_3) + \rho_4 u_4 - \rho_3 u_3 = 0, \quad (2.131)$$

で、 $u_4 = 0$ だから、

$$\lambda \rho_4 = \rho_3(\lambda - u_3), \quad (2.132)$$

となる。また、

$$u_3 = \lambda \frac{2}{\gamma + 1} \frac{M_4^2 - 1}{M_4^2}, \quad (2.133)$$

に (2.129) と、(2.130) を代入すると、

$$u_3 = c_4 \left(\frac{p_3}{p_4} - 1 \right) \sqrt{(2/\gamma) / \left((\gamma + 1) \frac{p_3}{p_4} + (\gamma - 1) \right)}, \quad (2.134)$$

となる。

次に、膨張波の領域について条件を求めて見よう。 $\rho = \rho_1$, $u = u_1 = 0$, $p = p_1$ の一定状態の領域へ進行する 1 パラメータ ($\varphi = u - c$) の膨張波は単純波であるから、膨張波をはさんで保存される一般化されたリーマン不変量は、

$$\frac{p_1}{\rho_1^\gamma} = \frac{p_2}{\rho_2^\gamma}, \quad (2.135)$$

および、

$$u_1 + \frac{2c_1}{\gamma - 1} = u_2 + \frac{2c_2}{\gamma - 1}, \quad (2.136)$$

である。ここで、 $u_1 = 0$ だから、

$$\begin{aligned} u_2 &= \frac{2c_1}{\gamma - 1} \left(1 - \frac{c_2}{c_1} \right) \\ &= \frac{2c_1}{\gamma - 1} \left(1 - \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}} \right), \end{aligned} \quad (2.137)$$

となる。

最後に、接触不連続面の条件について見てみる。接触不連続面の跳びをはさんでの条件は、接触面と共に動く系 (速度 ν とする) からみると、

$$[\rho u] = \rho_3(u_3 - \nu) - \rho_2(u_2 - \nu) = 0, \quad (2.138)$$

および、

$$[\rho u u + p] = \rho_3(u_3 - \nu)^2 + p_3 - \rho_2(u_2 - \nu)^2 - p_2 = 0, \quad (2.139)$$

となる。しかし、接触面で密度の異なる流体が混じらないことから、

$$u_2 = u_3 = \nu, \quad (2.140)$$

となるので、運動量の跳びに対する条件より、

$$p_2 = p_3, \quad (2.141)$$

の条件も導かれる。

したがって、(2.140) に (2.134) と (2.137) を代入し、(2.141) の条件を入れると、

$$\begin{aligned} & c_4 \left(\frac{p_3}{p_4} - 1 \right) \sqrt{(2/\gamma) / \left((\gamma + 1) \frac{p_3}{p_4} + (\gamma - 1) \right)} \\ &= \frac{2c_1}{\gamma - 1} \left(1 - \left(\frac{p_3}{p_1} \right)^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}} \right), \end{aligned} \quad (2.142)$$

となる。この方程式は p_3 に対する超越方程式になっているので、 p_3 の初期値を適当に仮定して、逐次近似法によって解くことができる。実際に、初期条件の値を代入して、逐次近似によって求めると、

$$\frac{p_3}{p_4} = 3.0313, \quad (2.143)$$

を得る。 $p_4 = 0.1$ より、 $p_3 = 0.30313$ となる。(2.130) より、衝撃波の速度を求めると、

$$\lambda = 1.7521552, \quad (2.144)$$

なので、時刻 $t = 0.14154$ の時の衝撃波の位置は、

$$x = 0.5 + \lambda t = 0.5 + 1.7521552 \times 0.14154 = 0.748, \quad (2.145)$$

である。(2.134) を使って、

$$u_3 = 0.92745207, \quad (2.146)$$

を得る。(2.132) を使えば、

$$\rho_3 = 0.2655736, \quad (2.147)$$

を得る。 u_2 および、 p_2 は接触不連続面の条件を使えば

$$u_2 = u_3 = 0.92745207, \quad p_2 = p_3 = 0.30313, \quad (2.148)$$

となり、接触面の速度は、

$$\nu = u_2 = u_3 = 0.92745207, \quad (2.149)$$

より、 $t = 0.14154$ の時の接触不連続面の位置は

$$x = 0.5 + \nu t = 0.5 + 0.92745207 \times 0.14154 = 0.631, \quad (2.150)$$

となる。 ρ_2 については、膨張波の条件より、

$$\rho_2 = \rho_1 \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{1}{\gamma}} = 0.4263192, \quad (2.151)$$

となる。膨張波の領域では、

$$u + \frac{2c}{\gamma - 1} = \frac{2c_1}{\gamma - 1}, \quad (2.152)$$

および、

$$u - c = \varphi, \quad (2.153)$$

により、 φ をパラメータとして、

$$c = \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \left(\frac{2c_1}{\gamma - 1} - \varphi \right), \quad (2.154)$$

より音速を、および、

$$u = \varphi + c, \quad (2.155)$$

より速度を、および、

$$\rho = \rho_1 \left(\frac{c}{c_1} \right)^{\frac{2}{\gamma-1}}, \quad (2.156)$$

より密度を、そして、

$$p = p_1 \left(\frac{c}{c_1} \right)^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}}, \quad (2.157)$$

より圧力を計算できる。膨張波の先端は、

$$\varphi_1 = u_1 - c_1 = 0 - \sqrt{1.4} = -1.183, \quad (2.158)$$

に対応し、膨張波の後端は、

$$\begin{aligned} \varphi_2 &= u_2 - c_2 \\ &= 0.92745207 - \sqrt{1.4 \times 0.30313 / 0.4263192} \\ &= -0.07027, \end{aligned} \quad (2.159)$$

に対応している。したがって、膨張波は

$$-1.183 < \varphi < -0.07027, \quad (2.160)$$

の範囲に存在する。パラメータ φ に対応する膨張波の $t = 0.14154$ における位置は、膨張波の特性速度が $\varphi = u - c$ そのものであることを使って、

$$x = 0.5 + \varphi t = 0.5 + \varphi \times 0.14154, \quad (2.161)$$

より求まる。いくつかの点における物理量を実際に計算すると、

$\varphi = u - c$	x	u	ρ	p
-0.0703	0.490	0.927	0.426	0.303
-0.2	0.472	0.819	0.475	0.352
-0.4	0.443	0.653	0.557	0.441
-0.6	0.415	0.486	0.651	0.549
-0.8	0.387	0.319	0.758	0.678
-1.0	0.358	0.153	0.877	0.833
-1.183	0.333	0.0	1.0	1.0

を得る。

宿題：自然界における衝撃波の例を3例以上あげよ。また、なぜそれが衝撃波と言えるのかの根拠も示せ。

第3章 差分法の基礎

前章で議論した双曲型発展方程式を計算機で数値的に解く場合、時間と空間 (これを時空と略する) について離散化し、跳びとびの点の物理量を使って、微分方程式を近似的に解く。このような方法を**差分法 (difference method)** と呼び、差分法に基づく方程式を差分方程式と呼ぶ。差分方程式を解く場合に、その差分式が微分方程式に漸近的に収束するかどうかは自明なことではない。ここでは、どのような条件のもとで、差分式が微分方程式に収束するかについて調べ、実際の双曲型発展方程式に適用してみる。

3.1 差分方程式と微分方程式

1次元の非粘性 Burgers 方程式やオイラー方程式を考える。いま、時空 (x, t) の上の跳び跳びの点でのみ物理量を考えて、その点での物理量を

$$u_j^n \equiv u(x_j, t_n), \quad (j = 1, \dots, J; n = 1, \dots, N) \quad (3.1)$$

などと表すことにする。このとき、点 (x_j, t_n) における x -方向の微分は

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{\Delta x} + O(\Delta x), \quad (3.2)$$

と近似できる。ここで、 $O(\Delta x)$ は微分を差分で置き換える時に現われる **打ち切り誤差 (truncation error)** であり、その大きさが Δx の1次の order であることを表している。この例のように x_j の点の微分を x_j と x_{j-1} の点の差分で表す場合を**後退差分 (backward difference)** と呼ぶ。同様にして、

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{\Delta x} + O(\Delta x), \quad (3.3)$$

とも近似できて、この場合は**前進差分 (forward difference)** と呼ぶ。さらに、

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} + O((\Delta x)^2), \quad (3.4)$$

などとも近似できる。これは**中心差分 (central difference)** と呼ばれる。精度は Δx について2次精度になっていることに注意。これらの打ち切り誤差の評価は、 x_j のまわりの Taylor 展開、

$$\begin{aligned} u_{j+1}^n &\equiv u(x_j + \Delta x, t) \\ &= u(x_j, t) + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_j \Delta x + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_j (\Delta x)^2 \end{aligned}$$

$$+\frac{1}{6}\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right)_j(\Delta x)^3+O((\Delta x)^4), \quad (3.5)$$

$$\begin{aligned} u_{j-1}^n &\equiv u(x_j - \Delta x, t) \\ &= u(x_j, t) - \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_j \Delta x + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_j (\Delta x)^2 \\ &\quad - \frac{1}{6}\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right)_j (\Delta x)^3 + O((\Delta x)^4), \end{aligned} \quad (3.6)$$

より、すぐに導かれる。また、このふたつの式の辺々を加えると、

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{u_{j+1}^n - 2u(x_j, t) + u_{j-1}^n}{(\Delta x)^2} + O((\Delta x)^2), \quad (3.7)$$

という x について二階微分項の差分式も求まる。

時間 t についても同じように差分を考えることができ、

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{u_j^n - u_j^{n-1}}{\Delta t} + O(\Delta t), \quad (3.8)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + O(\Delta t), \quad (3.9)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{u_j^{n+1} - u_j^{n-1}}{2\Delta t} + O((\Delta t)^2), \quad (3.10)$$

となる。時間の差分についても空間の差分と同様に、後退差分、前進差分、中心差分という呼び方をする。いま、 c を定数としてつぎのような定数係数のスカラー波動方程式を考える。

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad (3.11)$$

のうち、時間微分を前進差分、空間微分を中心差分で置き換えると、

$$u_j^{n+1} = u_j^n - c \frac{\Delta t}{2\Delta x} (u_{j+1}^n - u_{j-1}^n), \quad (3.12)$$

となる。この場合、時間については1次、空間については2次の精度を持つ差分スキームになる。時間について前進差分、あるいは後退差分をとるやりかたを特別にオイラー法という場合もある。系の初期条件が与えられれば、この差分方程式は数値的に解ける。

3.2 差分スキームの安定性と Lax 法

式 (3.12) で与えられた差分スキームの数値的安定性を調べる。いま、

$$u_j^n = g^n \exp(ikj\Delta x), \quad (3.13)$$

とにおいて、このフーリエ成分の振幅がどう成長するかをしてみる。ここで、 k は波数であり、 i は虚数単位である。これを上の式に入れると、

$$\begin{aligned} g &= 1 - c \frac{\Delta t}{2\Delta x} (\exp(ik\Delta x) - \exp(-ik\Delta x)) \\ &= 1 - ic \frac{\Delta t}{\Delta x} \sin(k\Delta x), \end{aligned} \quad (3.14)$$

となり、振幅の増幅係数 (amplification coefficient) g は

$$|g|^2 = 1 + \left(c \frac{\Delta t}{\Delta x}\right)^2 \sin^2(k\Delta x) > 1, \quad (3.15)$$

というように常に 1 より大きくなる。つまり、

$$c \frac{\Delta t}{\Delta x} = \text{fixed}, \quad (3.16)$$

で一定である限りは振幅が指数関数的に大きくなり、このスキームは無条件に不安定になる。

差分スキームが安定であるためには、ある数 K があり、

$$|g| < 1 + K\Delta t, \quad (3.17)$$

となることが必要条件である。この時、

$$\lim_{N \rightarrow \infty} |u^N| = \lim_{N \rightarrow \infty} |g|^N < \lim_{N \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{KT}{N}\right)^N \rightarrow \exp(KT), \quad (3.18)$$

となり、 u_j^n は発散することはない。ここで、

$$T = N\Delta t, \quad (n = 1, \dots, N) \quad (3.19)$$

は積分時間である。

Lax はこれに代わるものとして、

$$u_j^{n+1} = \frac{1}{2} (u_{j+1}^n + u_{j-1}^n) - c \frac{\Delta t}{2\Delta x} (u_{j+1}^n - u_{j-1}^n), \quad (3.20)$$

なる差分スキームを提案した。このスキームの増幅係数 g を求めてみると、

$$\begin{aligned} g &= \frac{1}{2} (\exp(ik\Delta x) + \exp(-ik\Delta x)) \\ &\quad - c \frac{\Delta t}{2\Delta x} (\exp(ik\Delta x) - \exp(-ik\Delta x)) \\ &= \cos(k\Delta x) - ic \frac{\Delta t}{\Delta x} \sin(k\Delta x), \end{aligned} \quad (3.21)$$

となり、振幅の増幅係数は

$$|g|^2 = \cos^2(k\Delta x) + \left(c \frac{\Delta t}{\Delta x}\right)^2 \sin^2(k\Delta x)$$

$$= 1 - \left(1 - \left(c \frac{\Delta t}{\Delta x}\right)^2\right) \sin^2(k\Delta x), \quad (3.22)$$

と求まる。この場合は、条件

$$c \frac{\Delta t}{\Delta x} \leq 1, \quad (3.23)$$

を満足する時にこの差分スキームは安定になる。この条件はまた

$$\Delta t \leq \frac{\Delta x}{c}, \quad (3.24)$$

と書けば、時間ステップ Δt に対する **Courant-Friedrichs-Lavy (CFL) 条件** になる。このように、増幅係数を求めて差分スキームの安定性を議論するやりかたを **von Neumann の安定解析法** という。また、

$$\text{CFL number} \equiv c \frac{\Delta t}{\Delta x}, \quad (3.25)$$

は、陽的解法において重要なパラメータになるので、これを CFL 数と呼んで、たびたび引用する。

差分スキームが、

$$\left| \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} - \frac{\partial u}{\partial t} \right| \rightarrow 0, \quad \text{for } \Delta t \rightarrow 0 \quad (3.26)$$

を満たす時、この差分スキームは**適合条件 (consistency)** を満たすという。また、各差分スキームの解の真の解からの誤差 (打ち切り誤差) を、 p を整数として、

$$\left| \frac{u_j^{n+1} - u(x_j, t_n + \Delta t)}{\Delta t} \right| = O((\Delta t)^p), \quad (3.27)$$

と表す時、この**差分スキームの精度 (order of accuracy)** は p 次であるという。

$$\begin{aligned} & \left| \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} - \frac{\partial u}{\partial t} \right| \\ = & \left| \frac{u_j^{n+1} - u(x_j, t_n + \Delta t) - u_j^n + u(x_j, t_n)}{\Delta t} \right. \\ & \left. + \frac{u(x_j, t_n + \Delta t) - u(x_j, t_n)}{\Delta t} - \frac{\partial u}{\partial t} \right| \\ < & O((\Delta t)^p) + \left| \frac{u(x_j, t_n + \Delta t) - u(x_j, t_n)}{\Delta t} - \frac{\partial u}{\partial t} \right| \\ \rightarrow & O((\Delta t)^p) + 0, \quad \text{for } \Delta t \rightarrow 0 \end{aligned} \quad (3.28)$$

より、適合であるためには p は1次以上 (p は整数) でなければならない。

初期値 $u(x, t=0)$ に対して、時刻 $t = n\Delta t$ でのある差分スキームの解を u_j^n として、微分方程式の解を $u(x_j, t)$ とした時、このふたつの解の差が、

$$\left| u_j^n - u(x_j, t) \right| \rightarrow 0, \quad \text{for } \Delta t \rightarrow 0 \quad (3.29)$$

を満たす時、この差分スキームは**収束性 (convergency)** を有するという。また、**安定性 (stability)** とは $u(x, t = 0)$ の任意成分が $t = n\Delta t$ において、一様に有界であることをいう。すなわち、ある数 K があり、すべての j, n に対して、

$$|u_j^n| < K, \quad (3.30)$$

が満足されることである。

Lax の定理 (1968) は、「適切なスキームでは安定性が収束性の必要十分条件である。」というものである。要するに、適切な差分スキームを作って、その安定性のみを調べれば、解の収束性は保証されている、安心せよというものである。具体的に述べると、Lax 法は 1 次精度であるから、適切なスキームである。安定性を調べて、CFL 条件を満たせば安定であることが示せたので、Lax 法の解の収束性も自然と保証されている、ということである。つまり、 Δt を小さくしていけば、いくらでも真の解に近づけることができるということを保証しているのである。

Lax 法を Burgers 方程式に適用すれば、

$$\begin{aligned} u_j^{n+1} = & \frac{1}{2} (u_{j+1}^n + u_{j-1}^n) - \frac{\Delta t}{2\Delta x} (f_{j+1}^n - f_{j-1}^n) \\ & + \mu \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} (u_{j+1}^n - 2u_j^n - u_{j-1}^n), \end{aligned} \quad (3.31)$$

ここで、

$$f_j^n = \frac{1}{2} (u_j^n)^2, \quad (3.32)$$

となり、1 次元オイラー方程式に適用すれば、

$$U_j^{n+1} = \frac{1}{2} (U_{j+1}^n + U_{j-1}^n) - \frac{\Delta t}{2\Delta x} (E_{j+1}^n - E_{j-1}^n), \quad (3.33)$$

となる。

3.3 コード検証のためのテスト問題

解析的に分かっている解と各種の差分スキームで計算した解を比較すると、簡単に差分スキームの振舞いの特徴を調べることができる。ここでは、そのテスト問題として、第一に定数係数のスカラー波動方程式 ($c = 1$)、

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad (c = 1) \quad (3.34)$$

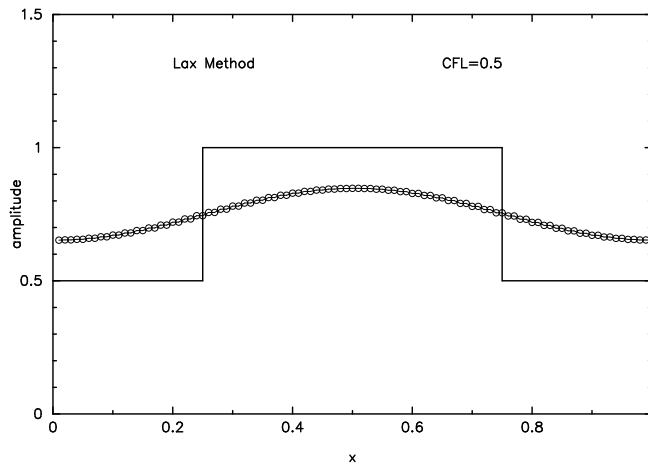
を考える。初期条件を

$$u = \begin{cases} 0.5 & (0 \leq x < 0.25) \\ 1 & (0.25 \leq x < 0.75) \\ 0.5 & (0.75 \leq x < 1.0) \end{cases} \quad (3.35)$$

とにおいて、 $x = 0$ と $x = 1$ に周期的境界条件をつける。この場合、 $t = 4$ における解は初期条件と同じになる。CFL 数を

$$\text{CFL} \equiv c \frac{\Delta t}{\Delta x}, \quad (3.36)$$

のように定義して、この問題を Lax 法で解くと、



になる。正しい解が太い実線で、数値解が○で表されている。 $x = (0, 1)$ の区間を等間隔の格子で $N = 100$ 点切つてある。接触不連続面とみなせるジャンプは数値粘性のために大きくなってしまうのがわかる。

$$\begin{aligned}
 u_{j+1}^n &= u(x_j + \Delta x, t) \\
 &= u(x_j, t) + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) \Delta x + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) (\Delta x)^2 \\
 &\quad + O((\Delta x)^3),
 \end{aligned} \tag{3.37}$$

$$\begin{aligned}
 u_{j-1}^n &= u(x_j - \Delta x, t) \\
 &= u(x_j, t) - \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) \Delta x + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) (\Delta x)^2 \\
 &\quad + O((\Delta x)^3),
 \end{aligned} \tag{3.38}$$

$$\begin{aligned}
 u_j^{n+1} &= u(x_j, t + \Delta t) \\
 &= u(x_j, t) + \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right) \Delta t + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right) (\Delta t)^2 \\
 &\quad + O((\Delta t)^3),
 \end{aligned} \tag{3.39}$$

を使うと、Lax スキームは

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{1}{2} \Delta t \left\{ -\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right\} \\
 &\quad + O((\Delta t)^2) + O\left(\frac{(\Delta x)^3}{\Delta t}\right),
 \end{aligned} \tag{3.40}$$

を解いていることになる。ここで、右辺の第一項は (3.34) を使えば、結局

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{2} \frac{(\Delta x)^2}{\Delta t} \left\{ 1 - \left(c \frac{\Delta t}{\Delta x}\right)^2 \right\} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{3.41}$$

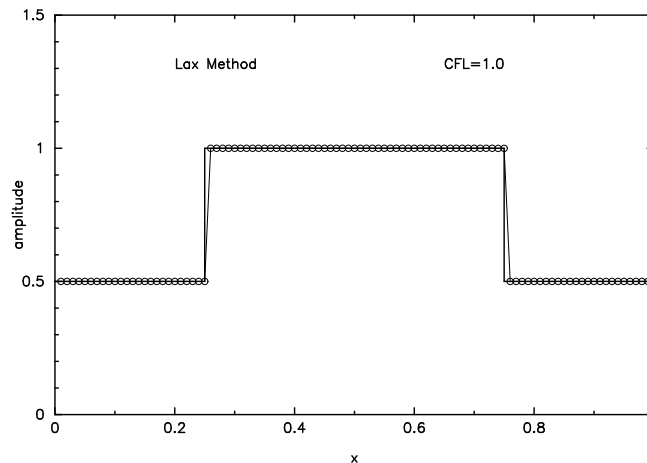
という Burgers 方程式を解いていることになる。したがって、CFL 数を 1 にすれば、右辺の項は完全にゼロとなり、数値粘性によるなまりは非常に小さくなると考えられる。実は、CFL 数が 1 の時は、差分式 (3.20) は

$$u_j^{n+1} = u_{j-1}^n, \quad (3.42)$$

となり、これは厳密に正しい関係式

$$\begin{aligned} u(x_j, t + \Delta t) &\equiv u_j^{n+1} \\ &= u_{j-1}^n \equiv u(x_j - \Delta x, t) \\ &= u(x_j - c\Delta t, t), \end{aligned} \quad (3.43)$$

を与えていることになる。したがって、次にみるようになまりがまったくなくなる。これも、正しい解が太い実線で、数値解が○で表されている。 $x = (0, 1)$ の区間を等間隔の格子で $N = 100$ 点切つてあるのも同じである。今後、特に断らない限りは、すべて $x = (0, 1)$ の区間を $N = 100$ 等分して計算してあるものと見なしてよい。



2 番目のテスト問題として、非粘性 Burgers 方程式、

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad (3.44)$$

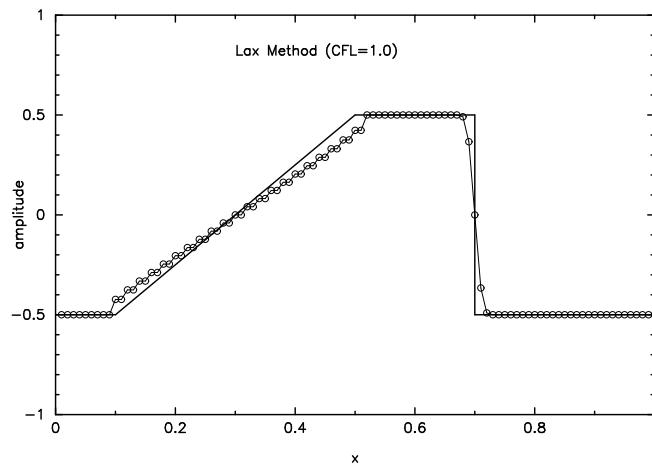
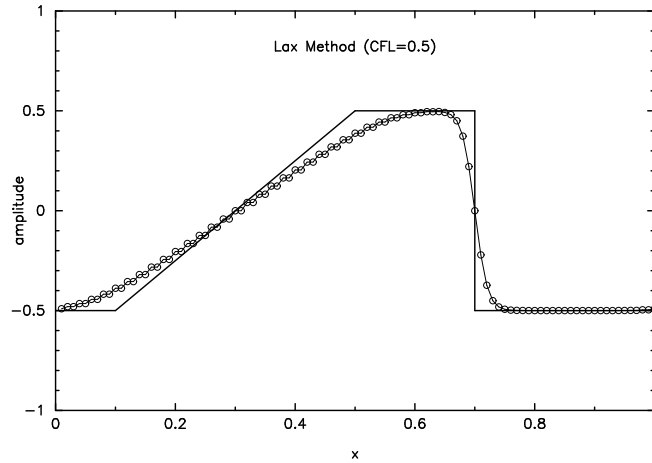
を考える。初期条件を

$$u = \begin{cases} -0.5 & (0 \leq x < 0.3) \\ 0.5 & (0.3 \leq x < 0.6) \\ -0.5 + (0.8 - x)/(0.8 - 0.6) & (0.6 \leq x < 0.8) \\ -0.5 & (0.8 \leq x < 1.0) \end{cases} \quad (3.45)$$

とにおいて、 $x = 0$ と $x = 1$ に周期的境界条件をつける。この初期条件で出発して、 $t = 0.4$ の時の解は、

$$u = \begin{cases} -0.5 & (0 \leq x < 0.1) \\ -0.5 + (x - 0.1)/(0.5 - 0.1) & (0.1 \leq x < 0.5) \\ 0.5 & (0.5 \leq x < 0.7) \\ -0.5 & (0.7 \leq x < 1.0) \end{cases} \quad (3.46)$$

となる。CFL=0.5 で計算したものは、



となる。ここで、 $x = 0.7$ の位置では、衝撃波が存在し、 $x = 0.5$ より以後では、膨張波になっている。打ち切り誤差により、衝撃波の場所では、衝撃波がかなりなまっている。また、膨張波の部分では、格子点ふたつが一组になって、 u の値が同じようになっている現象が見られる。これは、Lax 法が格子点の隣同士を使うのではなく、ひとつおきのものを使うことによる影響とみられる。速度が変化する場合の CFL 数は

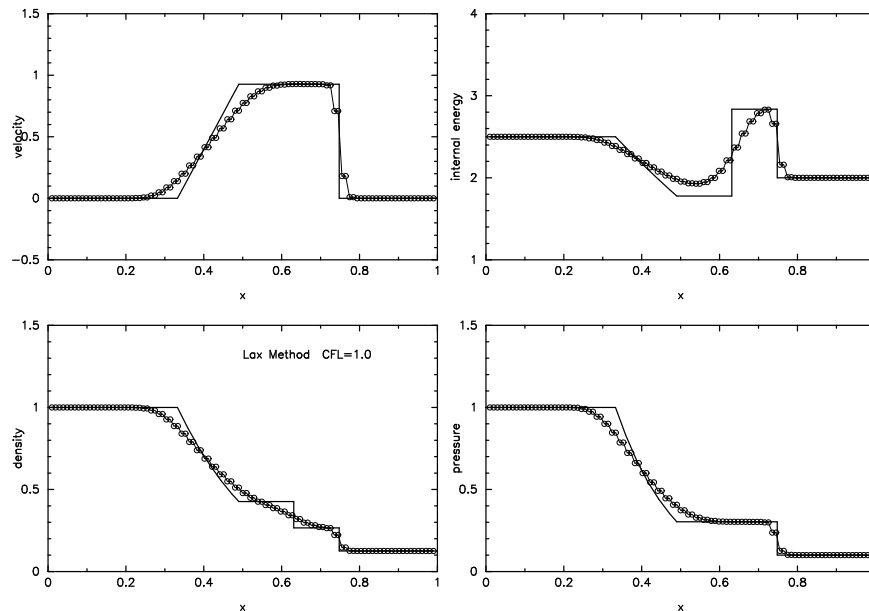
$$\text{CFL} \equiv \max \left(u \frac{\Delta t}{\Delta x} \right), \quad (3.47)$$

で決める。また、CFL=1.0 で計算したものは、 u の最大値の近辺で CFL=1.0 の効果により、2次の数値粘性項が非常に小さくなることから、衝撃波の捕獲がすごく改善されている。

最後の三つ目のテストは、Sod's shock tube problem を取り扱う。これの解析解は第2章で論じたのでそちらを見られたい。この場合、特性速度は、 $u - c$, u , $u + c$ の3つあるので、このうち絶対値の最大のものは、 $|u| + c$ で与えられるので、CFL 数は、

$$\text{CFL} \equiv \max \left((|u_j| + c_j) \frac{\Delta t}{\Delta x} \right), \quad (3.48)$$

と定義できる。ここで、 $\max()$ は $j = 1, \dots, N$ のうち最大のものをとることを意味する。CFL= 1.0 の場合の結果を次に示す。これは、 $x = (0, 1)$ の区間を $N = 100$ の等間隔格子で計算したものである。太い実線が解析解を表し、○が実際の計算点の物理量を表している。これをみると衝撃波についてはそれなりに捉えているが、接触不連続面はほとんどなまって見えない。膨張波領域でもかなり解がなだらかになまってしまう。また、2つの点で数値解が同じような値をとる現象がみられる。



3.4 高次精度差分法と Lax-Wendroff スキーム

Lax 法は Δt について 1 次精度の差分スキームであった。これを高次精度の差分スキームにすることを考える。定数係数のスカラー波動方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad (3.49)$$

を出発点にすると、 u を t について Taylor 展開して、

$$u(x, t + \Delta t) = u(x, t) + \Delta t \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2} (\Delta t)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \dots, \quad (3.50)$$

を得る。ここで、

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -c \frac{\partial u}{\partial x} \quad (3.51)$$

の関係を使えば、

$$u(x, t + \Delta t) = u(x, t) - c \Delta t \frac{\partial u}{\partial x} + c^2 \frac{1}{2} (\Delta t)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dots, \quad (3.52)$$

とおける。ここで、微分を式 (3.4) と (3.7) を使って、中心差分に置き換えると、

$$\begin{aligned} u_j^{n+1} &= u_j^n - \frac{1}{2}c \frac{\Delta t}{\Delta x} (u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) \\ &\quad + \frac{1}{2} \left(c \frac{\Delta t}{\Delta x} \right)^2 (u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n), \end{aligned} \quad (3.53)$$

を得る。この差分スキームの安定性は式 (3.13) を使って、増幅係数が

$$\begin{aligned} g &= 1 - c \frac{\Delta t}{2\Delta x} (\exp(ik\Delta x) - \exp(-ik\Delta x)) \\ &\quad + \frac{1}{2} \left(c \frac{\Delta t}{\Delta x} \right)^2 (\exp(ik\Delta x) - 2 + \exp(-ik\Delta x)) \\ &= 1 - ic \frac{\Delta t}{\Delta x} \sin(k\Delta x) + \left(c \frac{\Delta t}{\Delta x} \right)^2 (\cos(k\Delta x) - 1), \end{aligned} \quad (3.54)$$

となるので、最終的に

$$\begin{aligned} |g|^2 &= \left[1 - \left(c \frac{\Delta t}{\Delta x} \right)^2 2 \sin^2\left(\frac{k\Delta x}{2}\right) \right]^2 + \left(c \frac{\Delta t}{\Delta x} \right)^2 \sin^2(k\Delta x) \\ &= 1 - 4 \left(c \frac{\Delta t}{\Delta x} \right)^2 \left[1 - \left(c \frac{\Delta t}{\Delta x} \right)^2 \right] \sin^4\left(\frac{k\Delta x}{2}\right), \end{aligned} \quad (3.55)$$

を得る。ここで、増幅係数が 1 以下になるには、

$$c \frac{\Delta t}{\Delta x} \leq 1, \quad (3.56)$$

が必要であり、これは CFL 条件に他ならない。

また、この差分スキームは

$$u_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} (u_{j+1}^n + u_j^n) - c \frac{\Delta t}{2\Delta x} (u_{j+1}^n - u_j^n) \quad (3.57)$$

$$u_j^{n+1} = u_j^n - c \frac{\Delta t}{\Delta x} (u_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - u_{j-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}) \quad (3.58)$$

と 2 ステップに分けて記述することができる。この差分スキームを **Lax-Wendroff 法** という。Lax-Wendroff 法は第一段を Lax 法で計算し、第二段をかえる跳び法 (leap-frog method) で計算する方法ともいえる。

Lax-Wendroff 法を用いて非粘性 Burgers 方程式を積分するには、 $f = u^2/2$ とおいて、第一段を、

$$u_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} (u_{j+1}^n + u_j^n) - \frac{\Delta t}{2\Delta x} (f_{j+1}^n - f_j^n), \quad (3.59)$$

で計算し、第二段を

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (f_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - f_{j-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}), \quad (3.60)$$

で計算する。同様に、1 次元オイラー方程式を積分するには、第一段を

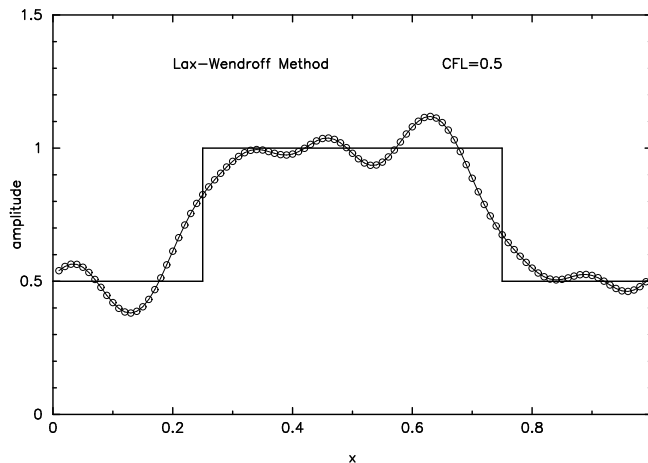
$$U_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} (U_{j+1}^n + U_j^n) - \frac{\Delta t}{2\Delta x} (E_{j+1}^n - E_j^n), \quad (3.61)$$

で計算し、第二段を

$$U_j^{n+1} = U_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(E_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - E_{j-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \right), \quad (3.62)$$

とすれば良い。

第一番目のテスト問題、定数係数のスカラー波動方程式を、 $CFL=0.5$ において、Lax-Wendroff 法で積分した図を次に示す。



この場合の打ち切り誤差を評価すると、

$$\begin{aligned} u_{j+1}^n &= u(x_j + \Delta x, t) \\ &= u(x_j, t) + \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) \Delta x + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) (\Delta x)^2 \\ &\quad + \frac{1}{6} \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right) (\Delta x)^3 + O((\Delta x)^4), \end{aligned} \quad (3.63)$$

$$\begin{aligned} u_{j-1}^n &= u(x_j - \Delta x, t) \\ &= u(x_j, t) - \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) \Delta x + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) (\Delta x)^2 \\ &\quad - \frac{1}{6} \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right) (\Delta x)^3 + O((\Delta x)^4), \end{aligned} \quad (3.64)$$

$$\begin{aligned} u_j^{n+1} &= u(x_j, t + \Delta t) \\ &= u(x_j, t) + \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right) \Delta t + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right) (\Delta t)^2 \\ &\quad + \frac{1}{6} \left(\frac{\partial^3 u}{\partial t^3} \right) (\Delta t)^3 + O((\Delta t)^4), \end{aligned} \quad (3.65)$$

を使うと、Lax-Wendroff スキームは

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{2} \Delta t \left\{ -\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right\}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{6} (\Delta t)^2 \left\{ -\frac{\partial^3 u}{\partial t^3} - c \left(\frac{\Delta x}{\Delta t} \right)^2 \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right\} \\
& + O((\Delta t)^3) + O\left(\frac{(\Delta x)^4}{\Delta t}\right), \tag{3.66}
\end{aligned}$$

を解いていることになる。ここで、右辺の第一項は式 (3.49) を使えば、結局ゼロになり、

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{6} (\Delta t)^2 c^3 \left\{ 1 - \left(\frac{\Delta x}{c \Delta t} \right)^2 \right\} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}, \tag{3.67}$$

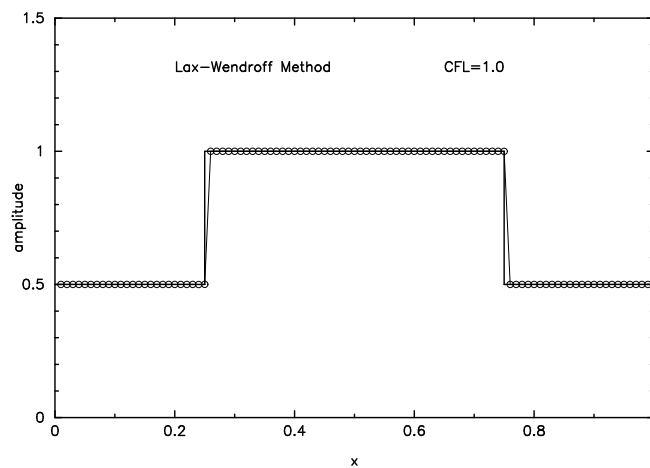
という KdV 方程式を解いていることになる。KdV 方程式は分散性の性質を持つので、3 階微分項が効いて来ると分散性の (つまりは振幅が振動する) 波が現われる。

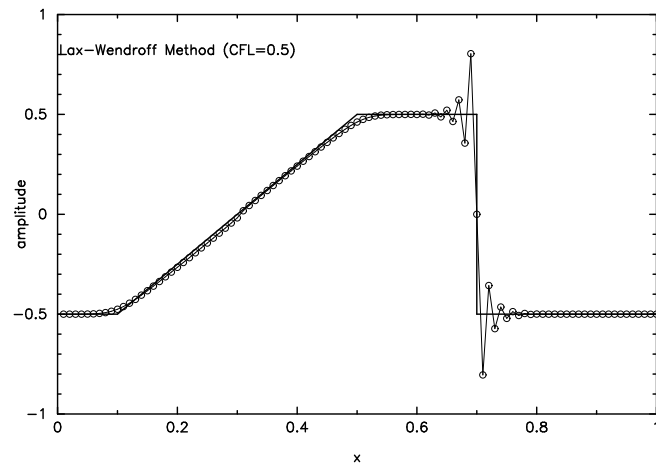
ところが、CFL 数を 1 にすれば、右辺の項は完全にゼロとなり、分散性の波は非常に小さくなると考えられる。さらに、CFL 数が 1 の時は、差分式 (3.53) は

$$u_j^{n+1} = u_{j-1}^n, \tag{3.68}$$

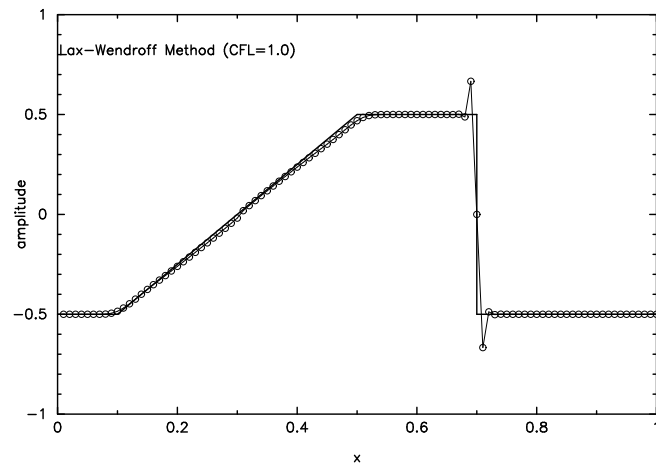
となり、Lax 法のところで述べたように厳密に正しい関係を与えるので、ジャンプでの振動がまったくなくなる。CFL=1.0 とおいて、Lax-Wendroff 法で積分した図を次に示す。

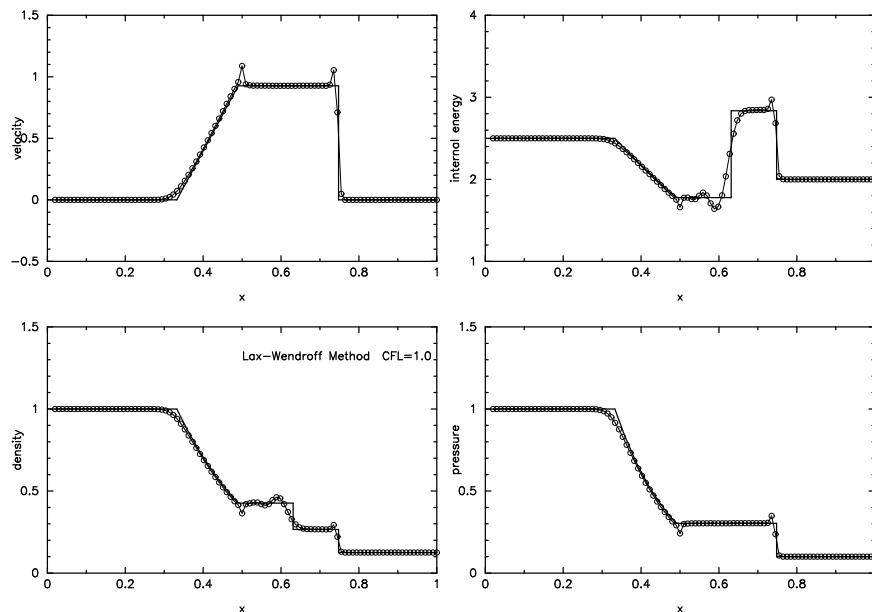
次に、2 番目のテスト問題の非粘性 Burgers 方程式を CFL=0.5 で求めた結果を示す。Lax 法の結果と比べると、衝撃波を鋭く捕獲しているのが分かる。ほぼ 2 格子点で捕獲できている。





ただし、衝撃波の前後では、解の大きな振動がみられる。同時に、膨張波の領域でも解析解に精度良く一致している。CFL= 1.0 を採用すると、衝撃波前後の振動があることは変化しないが、大きな振動は1回で、振幅も小さい。





3つ目のテスト問題である、Sod's shock tube problem を解いてみると、次の図のようになる。CFL=1.0 で計算してある。衝撃波直後の大きな overshooting と接触不連続面の背後の振動が特徴的である。接触不連続面での振動は、上で説明したように、打ち切り誤差の項が分散性をもつという性質から来ている。

3.5 MacCormack 法

2段階 Lax-Wendroff 法は、衝撃波のところで overshooting と呼ばれる振動が現われる。これをできるだけ押える方法として、2段階 Lax-Wendroff 法を変形した MacCormack 法が提案された。非粘性 Burgers 方程式においては、 $f = u^2/2$ として、第一段を、

$$u_j^p = u_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (f_{j+1}^n - f_j^n), \quad (3.69)$$

というように前進差分で計算し、第二段を

$$u_j^{n+1} = \frac{1}{2} \left(u_j^n + u_j^p - \frac{\Delta t}{\Delta x} (f_j^p - f_{j-1}^p) \right), \quad (3.70)$$

というように後退差分で計算する。同様に、1次元オイラー方程式を積分するには、

$$U_j^p = U_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (E_{j+1}^n - E_j^n), \quad (3.71)$$

というように前進差分で計算し、第二段を

$$U_j^{n+1} = \frac{1}{2} \left(U_j^n + U_j^p - \frac{\Delta t}{\Delta x} (E_j^p - E_{j-1}^p) \right), \quad (3.72)$$

と後退差分で計算する。第一段を予測子、第二段を修正子とみなす、予測子・修正子法とみなすこともできる。

この MacCormack 法は定数係数、あるいは定数マトリックスの双曲型波動方程式であれば、

$$U_j^p = U_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} A (U_{j+1}^n - U_j^n), \quad (3.73)$$

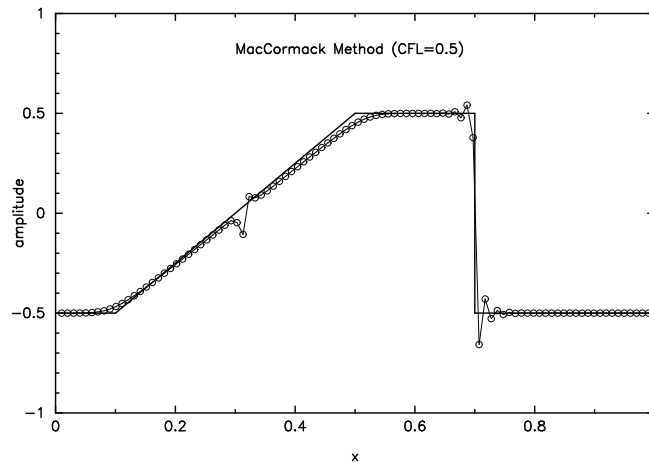
を

$$U_j^{n+1} = \frac{1}{2} \left(U_j^n + U_j^p - \frac{\Delta t}{\Delta x} A (U_j^p - U_{j-1}^p) \right), \quad (3.74)$$

に代入して、

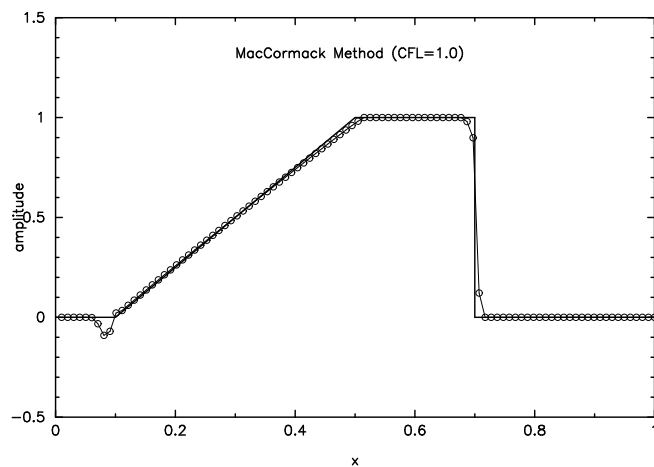
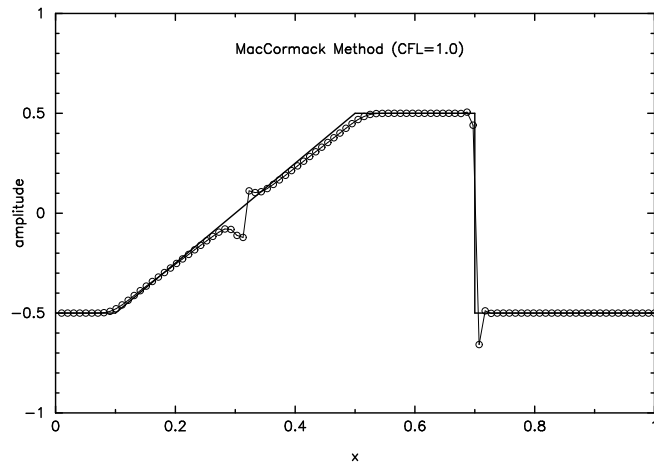
$$\begin{aligned} U_j^{n+1} &= \frac{1}{2} \left(U_j^n + U_j^p - \frac{\Delta t}{\Delta x} (E_j^p - E_{j-1}^p) \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(U_j^n + U_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} A (U_{j+1}^n - U_j^n) - \frac{\Delta t}{\Delta x} A (U_j^p - U_{j-1}^p) \right) \\ &= U_j^n - \frac{\Delta t}{2\Delta x} A (U_{j+1}^n - U_{j-1}^n) \\ &\quad + \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta t}{\Delta x} \right)^2 A^2 (U_{j+1}^n - 2U_j^n + U_{j-1}^n), \end{aligned} \quad (3.75)$$

を得る。これは、Lax-Wendroff 法とまったく同じである。(A が定数マトリックスの時のみの関係である。A が定数でなければ、当然ながら違った解を与える。) したがって、1 番目のテストの結果は MacCormack 法と Lax-Wendroff 法ではまったく同じになるので、図は省略する。2 番目のテストである非粘性 Burgers 方程式を CFL=0.5 で MacCormack 法で積分すると、

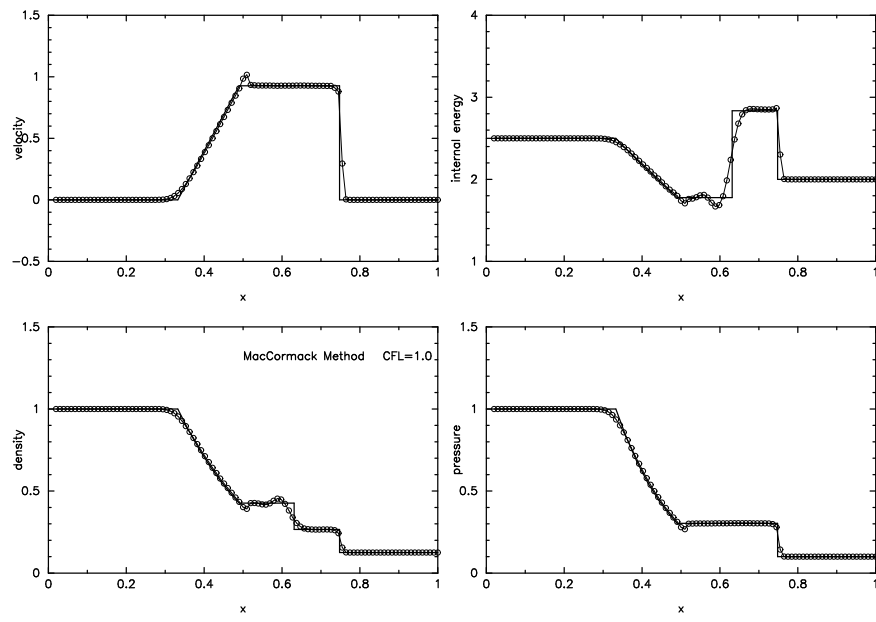


となり、確かに衝撃波の直後の overshooting と呼ばれる振動は Lax-Wendroff 法の結果と比べて、振幅が小さくなっている。ただし、MacCormack 法での注意は、初期条件として、 $x = 0.3$ で u の跳びがあった。この跳びを間に格子点なしで一気に $u = -0.5$ から $u = 0.5$ に跳ばすと $x = 0.3$ 近傍の解が大きくずれてしまうという現象が起きる。これを避けるには、一気に $u = -0.5$ から $u = 0.5$ に跳ばさずに、間に 1 点か 2 点の格子点をとって、そこでの値を段階的に $u = 1.0$ まで、増やしていくと良い。図の結果はそうして求めたものである。しかし、依然としてジャンプが残っている。これは、2 章で議論した、膨張衝撃

波が、もとジャンプがあった場所に出ているのが分かる。次の図に示すように、 $CFL=1$ にすると、衝撃波直後の overshooting はまったくみられなくなる。ただし、衝撃波の前に弱い undershooting はある。 $x' = x - vt$ で $v = -0.5$ で全体をガリレイ変換すると、特性速度が正から負へ変わる場所はなくなくなる。しかし、膨張波の先端が特性速度がゼロになるので、ここでやはり膨張衝撃波の残骸らしきものが存在している。



3番目のテストとしての Sod's shock tube problem の $CFL=1.0$ での結果を次に示す。ここでも、衝撃波直後の overshooting はみられない。ただ、接触不連続面での分散性による解の振動は Lax-Wendroff 法と同じように現われる。この点では本質的な改善点にはなっていない。



第4章 単調性とTVD

定数係数スカラー方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -c \frac{\partial u}{\partial x} \quad (4.1)$$

においては、初期の分布が一定速度 c で x の正の方向に動いていくだけなので、解の単調性が保存される。すなわち初期分布 $u(x, 0)$ が x -方向に単調増加(減少)であれば、以後の時刻 t でも $u(x, t)$ は単調増加(減少)である。この方程式を解くスキームを c_l を定数係数として、

$$u_j^{n+1} = \sum_{l=-k}^k c_l u_{j+l}^n, \quad (4.2)$$

とおくと、

$$c_l \geq 0, \quad (\text{for } -k \leq l \leq k) \quad (4.3)$$

であれば、単調性が保存される。例えば、単調増加の初期分布から出発する、3点スキーム ($k=1$) を考えると、

$$u_j^{n+1} = c_1 u_{j+1}^n + c_0 u_j^n + c_{-1} u_{j-1}^n, \quad (4.4)$$

$$u_{j+1}^{n+1} = c_1 u_{j+2}^n + c_0 u_{j+1}^n + c_{-1} u_j^n, \quad (4.5)$$

と書ける。ここで、辺々を引き算すると、

$$\begin{aligned} u_{j+1}^{n+1} - u_j^{n+1} &= c_1 (u_{j+2}^n - u_{j+1}^n) + c_0 (u_{j+1}^n - u_j^n) \\ &\quad + c_{-1} (u_j^n - u_{j-1}^n), \end{aligned} \quad (4.6)$$

となり、 n ステップ目において、単調増加なら

$$u_{j+2}^n - u_{j+1}^n > 0, \quad u_{j+1}^n - u_j^n > 0, \quad u_j^n - u_{j-1}^n > 0, \quad (4.7)$$

が成立しているので、各係数 c_l がすべて正なら、

$$u_{j+1}^{n+1} - u_j^{n+1} > 0, \quad (4.8)$$

の関係が導かれ、次の $n+1$ ステップにおいても単調増加の関係は維持される。したがって、初期条件で、単調増加なら、以後のすべてのステップにおいても単調増加が維持される。

非線形の方程式を

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad (4.9)$$

とすると、この解の弱い解は次の単調性をもつことがわかっている。

1. x -方向に新たな局所的な極値が発生することはない。

2. 局所的な最小値は非減少であり、局所的な最大値は非増大である。

この性質から、 x -方向の u の**全変分量 (total variation)** を $TV(u(x, t))$ と表すと、 t に対して非増加であるから、

$$TV(u(x, t_2)) \leq TV(u(x, t_1)), \quad \text{for } t_2 \geq t_1 \quad (4.10)$$

となる。式 (4.9) に対する $2k + 1$ 点を使う保存則陽的スキームは次のように書ける。

$$\begin{aligned} u_j^{n+1} &\equiv Lu_j^n \\ &= u_j^n - \lambda \left[\bar{f}(u_{j-k+1}^n, \dots, u_{j+k}^n) \right. \\ &\quad \left. - \bar{f}(u_{j-k}^n, \dots, u_{j+k-1}^n) \right], \end{aligned} \quad (4.11)$$

ここで、 \bar{f} は**数値流束 (numerical flux)** と呼び、

$$\lambda = \frac{\Delta t}{\Delta x}, \quad (4.12)$$

とする。あるスキームが

$$TV(Lu^n) \leq TV(u^n) \equiv \sum_{j=-\infty}^{\infty} \left| \Delta_{j+1/2} u^n \right|, \quad (4.13)$$

$$\Delta_{j+1/2} u^n = u_{j+1}^n - u_j^n, \quad (4.14)$$

となる時、**全変分量減少 (Total Variation Diminishing, TVD)** であるという。

Harten は TVD に関して、次の定理が成り立つことを示した。

定理 1 単調なスキームは TVD である。

定理 2 TVD スキームは単調性保存 (monotonicity preserving) である。

したがって、単調なスキームを作れば、自動的に TVD は保証されるわけである。いま、保存形の任意の 3 点スキーム ($k = 1$) は、

$$\begin{aligned} \lambda \left[\bar{f}(u_{j-1}^n, u_j^n) - \bar{f}(u_j^n, u_j^n) \right] &= -C^+(u_{j-1}, u_j) \Delta_{j-1/2} u^n \\ &\equiv -C_{j-1/2}^+ \Delta_{j-1/2} u^n, \end{aligned} \quad (4.15)$$

$$\begin{aligned} \lambda \left[\bar{f}(u_j^n, u_{j+1}^n) - \bar{f}(u_j^n, u_j^n) \right] &= -D^-(u_j, u_{j+1}) \Delta_{j+1/2} u^n \\ &\equiv -D_{j+1/2}^- \Delta_{j+1/2} u^n, \end{aligned} \quad (4.16)$$

という関係を用いると、

$$\begin{aligned} Lu_j^n &= u_j^n - \lambda \left[\bar{f}(u_j^n, u_{j+1}^n) - \bar{f}(u_{j-1}^n, u_j^n) \right] \\ &= u_j^n - C_{j-1/2}^+ \Delta_{j-1/2} u^n + D_{j+1/2}^- \Delta_{j+1/2} u^n \\ &= C_{j-1/2}^+ u_{j-1}^n + \left(1 - C_{j-1/2}^+ - D_{j+1/2}^- \right) u_j^n \\ &\quad + D_{j+1/2}^- u_{j+1}^n, \end{aligned} \quad (4.17)$$

と表せて、Harten の補助定理によると、

$$C_{j-1/2}^+ \geq 0, \quad D_{j+1/2}^- \geq 0, \quad 1 - C_{j-1/2}^+ - D_{j+1/2}^- \geq 0, \quad (4.18)$$

を満たせば、TVD (十分条件) である。条件 (4.18) を満たす保存則スキームは TVD であり、定理 2 より単調性を保存するから、数値振動の発生しない衝撃波解を維持できることになる。

Lax 法は、3 点スキームの 1 種であるから、係数を求めると、

$$\begin{aligned} Lu_j^n &= \frac{1}{2} \{u_{j+1}^n + u_{j-1}^n - \lambda [f_{j+1}^n - f_{j-1}^n]\} \\ &= \frac{1}{2} \{u_{j+1}^n + u_{j-1}^n - \lambda a(u_{j+1}^n, u_{j-1}^n) [u_{j+1}^n - u_{j-1}^n]\} \\ &= \frac{1}{2} (1 - \lambda \bar{a}_j^n) u_{j+1}^n + \frac{1}{2} (1 + \lambda \bar{a}_j^n) u_{j-1}^n, \end{aligned} \quad (4.19)$$

となる。ただし、

$$\bar{a}_j^n \equiv a(u_{j+1}^n, u_{j-1}^n), \quad (4.20)$$

であり、非粘性 Burgers 方程式の場合は、

$$\bar{a}_j^n = \frac{1}{2} (u_{j+1}^n + u_{j-1}^n), \quad (4.21)$$

となる。ここで、式 (4.18) から、

$$-1 \leq \lambda \bar{a}_j^n \leq 1, \quad (4.22)$$

が満たされれば、TVD であることが分かる。これは、CFL 条件に他ならないので、要するに CFL 条件が満たされていれば、Lax 法は TVD である、ということが出来る。したがって、単調性も保存され、衝撃波や接触不連続面での振動もみられない。

Lax-Wendroff 法の場合は、第一段では、

$$\begin{aligned} u_{j+1/2}^{n+1/2} &= \frac{1}{2} \{u_{j+1}^n + u_j^n - \lambda [f_{j+1}^n - f_j^n]\} \\ &= \frac{1}{2} \{u_{j+1}^n + u_j^n - \lambda a(u_{j+1}^n, u_j^n) [u_{j+1}^n - u_j^n]\} \\ &= \frac{1}{2} (1 - \lambda \bar{a}_{j+1/2}^n) u_{j+1}^n + \frac{1}{2} (1 + \lambda \bar{a}_{j+1/2}^n) u_j^n, \end{aligned} \quad (4.23)$$

となり、第二段では、

$$\begin{aligned} u_j^{n+1} &= u_j^n - \lambda [f_{j+1/2}^{n+1/2} - f_{j-1/2}^{n+1/2}] \\ &= u_j^n - \lambda a(u_{j+1/2}^{n+1/2}, u_{j-1/2}^{n+1/2}) [u_{j+1/2}^{n+1/2} - u_{j-1/2}^{n+1/2}] \\ &= u_j^n - \lambda \bar{a}_j^{n+1/2} \left[\frac{1}{2} (1 - \lambda \bar{a}_{j+1/2}^n) u_{j+1}^n + \frac{1}{2} (1 + \lambda \bar{a}_{j+1/2}^n) u_j^n \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} (1 - \lambda \bar{a}_{j-1/2}^n) u_j^n - \frac{1}{2} (1 + \lambda \bar{a}_{j-1/2}^n) u_{j-1}^n \right] \\ &= -\frac{1}{2} \lambda \bar{a}_j^{n+1/2} (1 - \lambda \bar{a}_{j+1/2}^n) u_{j+1}^n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left[1 - \frac{1}{2} \lambda \bar{a}_j^{n+1/2} \left(\lambda \bar{a}_{j+1/2}^n + \lambda \bar{a}_{j-1/2}^n \right) \right] u_j^n \\
& + \frac{1}{2} \lambda \bar{a}_j^{n+1/2} \left(1 + \lambda \bar{a}_{j-1/2}^n \right) u_{j-1}^n,
\end{aligned} \tag{4.24}$$

となる。CFL 条件を満たしていれば、

$$1 + \lambda \bar{a} \geq 0, \quad 1 - \lambda \bar{a} \geq 0, \tag{4.25}$$

が共に成り立つが、 $\lambda \bar{a}$ については正の場合も負の場合もあるので、例えば、 $\lambda \bar{a}$ が正の場合は u_{j+1} の係数が負になるし、逆に $\lambda \bar{a}$ が負の場合は、 u_{j-1} の係数が負になるので、係数のうちどれかが負になってしまうので、Lax-Wendroff 法は単調性保存ではない。したがって、TVD でない。このため、衝撃波の背後や、接触不連続面などで振動が起きる。

4.1 線形 Godunov 法

定数係数のスカラー波動方程式、

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad (c > 0) \tag{4.26}$$

の解は、特性線に沿って u の値は一定だから、

$$u(x, t + \Delta t) \equiv u_j^{n+1} = u(x - c\Delta t, t), \tag{4.27}$$

と書ける。これを、差分で近似する時にもっとも簡単な線形近似を使えば、 u_{j-1}^n と u_j^n の値から内挿して、

$$\begin{aligned}
u_j^{n+1} &= \frac{c\Delta t}{\Delta x} u_{j-1}^n + \frac{\Delta x - c\Delta t}{\Delta x} u_j^n \\
&= \lambda c u_{j-1}^n + (1 - \lambda c) u_j^n \\
&= u_j^n - \lambda c (u_j^n - u_{j-1}^n),
\end{aligned} \tag{4.28}$$

と表すことができる。これが、**線形ゴドノフ法 (linear Godunov method)** と呼ばれる方法である。CFL 条件 ($\lambda c \leq 1$) を課すると係数がすべて正 (またはゼロ) となるため、単調性保存となり、TVD である。速度 c が正の場合も、負の場合もまとめて表すと、(c の代わりに a を使って、)

$$u_j^{n+1} = \begin{cases} u_j^n - \lambda a (u_j^n - u_{j-1}^n) & \text{for } a \geq 0 \\ u_j^n - \lambda a (u_{j+1}^n - u_j^n) & \text{for } a \leq 0 \end{cases} \tag{4.29}$$

となる。速度の正負に応じて、風上側の値を使うように切替える方法を一般に**風上差分法 (upwind difference scheme)** と呼ぶ。線形 Godunov 法は、1 次精度風上差分法の一つである。

さて、

$$a^- \equiv \min(a, 0) = \frac{1}{2}(a - |a|), \tag{4.30}$$

$$a^+ \equiv \max(a, 0) = \frac{1}{2}(a + |a|), \quad (4.31)$$

とおくと、線形 Godunov 法は、

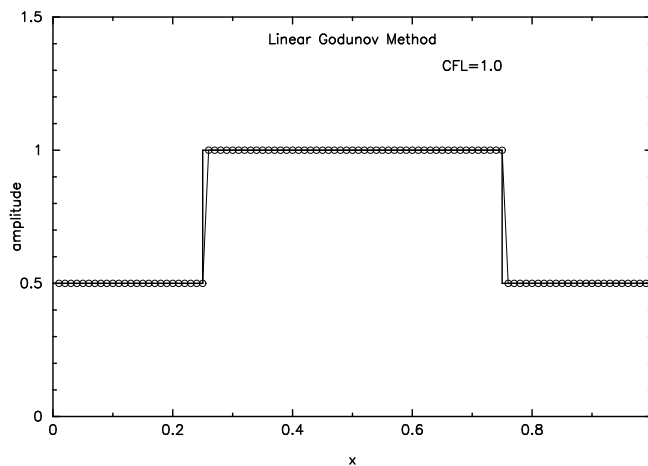
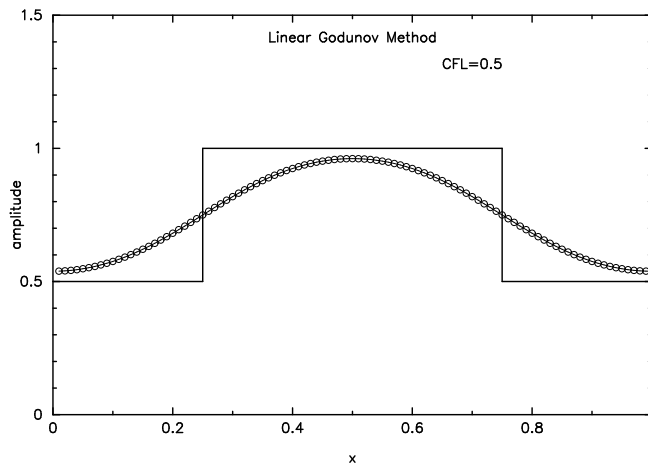
$$\begin{aligned} u_j^{n+1} &= u_j^n - \lambda \left\{ a^+ (u_j^n - u_{j-1}^n) + a^- (u_{j+1}^n - u_j^n) \right\} \\ &= -\lambda a^- u_{j+1}^n + (1 - \lambda |a|) u_j^n + \lambda a^+ u_{j-1}^n \\ &= u_j^n - \frac{\lambda}{2} a (u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) \\ &\quad + \frac{\lambda}{2} |a| (u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n), \end{aligned} \quad (4.32)$$

と書き直すことができる。ここで、注意すべきは、線形 Godunov 法は、時間差分はオイラー 1 次、空間差分は中心差分 2 次精度に人工粘性項として、

$$\frac{\lambda}{2} |a| (u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n) = \frac{\lambda}{2} |a| (\Delta x)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (4.33)$$

を付加したものと見なすことができる。

さて、一番目のテスト問題を線形 Godunov 法で解いてみると、次のようになる。



打ち切り誤差の影響を評価するために、

$$\begin{aligned} u_{j-1}^n &= u(x_j - \Delta x, t) \\ &= u(x_j, t) - \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) \Delta x + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) (\Delta x)^2 \\ &\quad + O((\Delta x)^3), \end{aligned} \quad (4.34)$$

$$\begin{aligned} u_j^{n+1} &= u(x_j, t + \Delta t) \\ &= u(x_j, t) + \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right) \Delta t + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right) (\Delta t)^2 \\ &\quad + O((\Delta t)^3), \end{aligned} \quad (4.35)$$

を使うと、線形 Godunov スキームは

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{1}{2} \Delta t \left\{ -\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \left(c \frac{\Delta x}{\Delta t}\right) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right\} \\ &\quad + O((\Delta t)^2) + O\left(\frac{(\Delta x)^3}{\Delta t}\right), \end{aligned} \quad (4.36)$$

を解いていることになる。ここで、右辺の第一項は

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -c \frac{\partial u}{\partial x}, \quad (4.37)$$

を使えば、結局

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{2} c \Delta x \left\{ 1 - \left(c \frac{\Delta t}{\Delta x}\right) \right\} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (4.38)$$

という Burgers 方程式を解いていることになる。形式は Lax 法と同じだが、CFL=0.5 の場合、右辺の係数が Lax 法の 3分の1 になっている。したがって数値粘性は Lax 法よりかなり小さい。このことが、CFL=0.5 の場合、Lax 法と比べて鈍りが少なくなっていることの原因である。もし、CFL 数を 1 にすれば、右辺の項は完全にゼロとなり、数値粘性によるなまりは非常に小さくなると考えられる。CFL 数が 1 の時は、 u_{j-1}^n の値がそのまま、 u_j^{n+1} の値となるので、線形補間による解の精度の劣化がない。したがって、高次の打ち切り誤差の項もゼロになるので、図のようになまりがまったくなくなる。このことは、Lax 法のところで説明したことと同じである。

4.2 非線形 Godunov 法

3点を使う ($k=1$) 陽的保存則スキームは、

$$\begin{aligned} u_j^{n+1} &= u_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} [\bar{f}(u_j^n, u_{j+1}^n) - \bar{f}(u_{j-1}^n, u_j^n)] \\ &= u_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (\bar{f}_{j+1/2}^n - \bar{f}_{j-1/2}^n), \end{aligned} \quad (4.39)$$

とおける。ここで、 $j-1$ と j の境界 $j-1/2$ での数値流束は、

$$\bar{f}_{j-1/2}^n = \bar{f}(u_{j-1}^n, u_j^n), \quad (4.40)$$

として、 $j-1$ での値と j での値から計算されるとする。この数値流束を、 u_{j-1} と u_j の Riemann 問題を厳密に解くことによって決定するのが、**非線形 Godunov 法 (nonlinear Godunov method)** と呼ばれる方法である。

ここでは、非粘性 Burgers 方程式、

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad (4.41)$$

$$f = \frac{1}{2}u^2, \quad (4.42)$$

を非線形 Godunov 法で解いてみることにする。二つの状態、 u_{j-1} と u_j が

$$x = x_{j-1/2} \equiv \frac{1}{2}(x_{j-1} + x_j), \quad (4.43)$$

で接しているとする。この状態の間には跳びがあるとすると、

$$\begin{aligned} \text{shock wave, if } & u_{j-1} > u_j, \\ \text{expansion wave, if } & u_{j-1} < u_j, \end{aligned} \quad (4.44)$$

になる。もし、衝撃波が形成される場合には、衝撃波の速度は、式 (2.44) より

$$u_s = \frac{1}{2}(u_{j-1} + u_j), \quad (4.45)$$

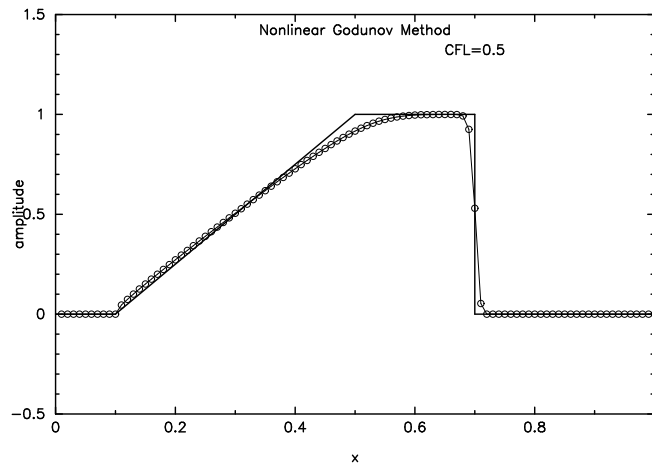
で与えられるので、微小な時間経った後の $x_{j-1/2}$ における物理量は、

$$\bar{u}_{j-1/2} = \begin{cases} u_{j-1}, & (u_s > 0) \\ u_j, & (u_s < 0) \end{cases} \quad (4.46)$$

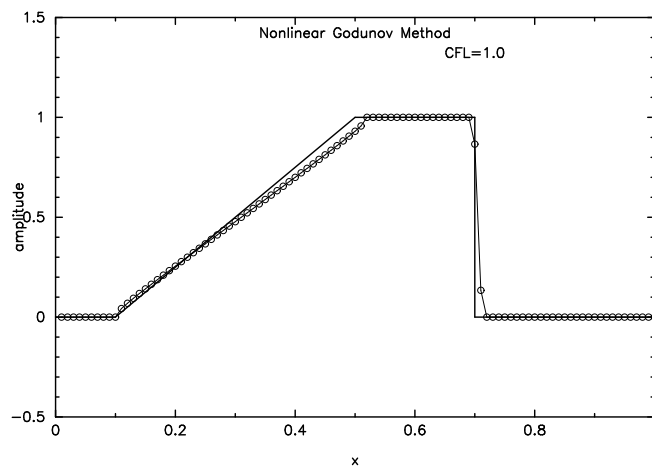
となる。逆に、膨張波の場合には、 $x_{j-1/2}$ における物理量は、

$$\bar{u}_{j-1/2} = \begin{cases} u_{j-1}, & (u_{j-1} > 0) \\ 0, & (u_{j-1} < 0 < u_j) \\ u_j, & (u_j < 0) \end{cases} \quad (4.47)$$

となる。このようにして求めた物理量 $u_{j-1/2}$ を用いて数値流束 $\bar{f}_{j-1/2}$ を計算すれば良い。このようにして、非線形 Godunov 法で 2 番目のテスト問題を解いた結果を次に示す。



厳密に Riemann 問題を解いて、数値流束を決定しているので、本来あってはならない数値的な振動は現われていない。CFL= 0.5 の場合は、衝撃波直後や膨張波の先端 ($x = 0.5$) に解のなまりがみられるが、CFL= 1.0 の場合は、それらもほとんどなく、解析解を良く再現している。



4.3 Godunov 法の簡略化

非線形 Godunov 法をそのまま計算機のコードとして実現すると、計算量が多くなる。Godunov 法の風上性を生かしながら、できるだけ簡略化する方向で以下に述べるようないくつかの方法が提案されている。

今、数値流束の計算を

$$\bar{f}_{j+1/2}^n = \bar{f}(u_j^n, u_{j+1}^n), \quad (4.48)$$

として、 j での値と $j+1$ での値から計算されるとする。線形 Godunov の式 (4.32) をもとにすると、

$$\bar{f}_{j+1/2}^n \equiv \bar{f}(u_j, u_{j+1}) = a^+ u_j + a^- u_{j+1}, \quad (4.49)$$

と置けば、

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (\bar{f}_{j+1/2} - \bar{f}_{j-1/2}), \quad (4.50)$$

となり、線形 Godunov スキームを再現できる。一般に、 a^- , a^+ は定数ではないから、式 (4.49) の通りにはならないが、こう置けると仮定すると、

$$\bar{f}(u_j, u_{j+1}) = a^+ u_j + a^- u_{j+1}, \quad (4.51)$$

$$\bar{f}(u_j, u_j) = f(u_j) = a^+ u_j + a^- u_j, \quad (4.52)$$

$$\bar{f}(u_{j+1}, u_{j+1}) = f(u_{j+1}) = a^+ u_{j+1} + a^- u_{j+1}, \quad (4.53)$$

となる。上の式から、下の二つの式を辺々引き算すると、

$$\bar{f}(u_j, u_{j+1}) - f(u_j) = a^- (u_{j+1} - u_j), \quad (4.54)$$

$$\bar{f}(u_j, u_{j+1}) - f(u_{j+1}) = a^+ (u_{j+1} - u_j), \quad (4.55)$$

となり、辺々足し算すると、

$$\bar{f}(u_j, u_{j+1}) = \frac{1}{2} [f(u_j) + f(u_{j+1})] - \frac{1}{2} (a^+ - a^-) (u_{j+1} - u_j), \quad (4.56)$$

となる。ここで、

$$a^- \equiv \min(a, 0) = \frac{1}{2}(a - |a|), \quad (4.57)$$

$$a^+ \equiv \max(a, 0) = \frac{1}{2}(a + |a|), \quad (4.58)$$

という定義を思い起こせば、

$$\bar{f}(u_j, u_{j+1}) = \frac{1}{2} [f(u_j) + f(u_{j+1})] - \frac{1}{2} |a| (u_{j+1} - u_j), \quad (4.59)$$

となる。これが、線形 Godunov 法を元にした、風上差分法の表現になっている。この形式を、非線形の領域に拡張すれば良い。

この数値流束を非線形 Godunov のように、厳密に Riemann 問題を解かずに、

$$\bar{f}(u_j, u_{j+1}) = \frac{1}{2} [f(u_j) + f(u_{j+1})] - \frac{1}{2} d(u_j, u_{j+1}), \quad (4.60)$$

と置いて、

$$d(u, v) = \int_u^v |a(w)| dw, \quad (\text{Osher}) \quad (4.61)$$

とするのが、**Osher 法**であり、

$$d(u, v) = \left| a\left(\frac{1}{2}(u+v)\right) \right| (v-u), \quad (\text{Roe}) \quad (4.62)$$

とするのが、**Roe 法**であり、

$$d(u, v) = \frac{1}{2} [|a(u)| + |a(v)|] (v-u), \quad (\text{van Leer}) \quad (4.63)$$

とするのが、**van Leer の flux vector splitting 法**である。ここで、

$$a \equiv \frac{\partial f}{\partial u}, \quad (4.64)$$

である。

4.4 Osher 法

Osher 法は非線形 Godunov 法と同じように、膨張波の部分はリーマン不変量の関係を用いるが、衝撃波の部分には overturned の圧縮波と見なして、これにもリーマン不変量の関係式を用いて状態を計算する。

したがって、非粘性 Burgers 方程式に適用すると、二つの状態、 u_j と u_{j+1} が

$$x = x_{j+1/2} \equiv \frac{1}{2}(x_j + x_{j+1}), \quad (4.65)$$

で接しているとする。この状態の間には跳びがあるとすると、もし、 $u_j < u_{j+1}$ ならば、膨張波になるから、ある時間後の解は、

$$u = \begin{cases} u_j, & (x - x_{j+1/2} < u_j t < u_{j+1} t) \\ (x - x_{j+1/2})/t, & (u_j t < x - x_{j+1/2} < u_{j+1} t) \\ u_{j+1}, & (u_j t < u_{j+1} t < x - x_{j+1/2}) \end{cases} \quad (4.66)$$

となる。したがって、膨張波の場合には、(非線形 Godunov 法と同じように) $x_{j+1/2}$ における物理量は、

$$\bar{u}_{j+1/2} = \begin{cases} u_j, & (0 < u_j < u_{j+1}) \\ 0, & (u_j < 0 < u_{j+1}) \\ u_{j+1}, & (u_j < u_{j+1} < 0) \end{cases} \quad (4.67)$$

となる。このようにして求めた物理量 $u_{j+1/2}$ を用いて数値流束 $\bar{f}_{j+1/2}$ を計算すれば良い。

もし、 $u_j > u_{j+1}$ ならば、over turned の圧縮波になるから、ある時間後の解は、

$$u = \begin{cases} u_j, & (x - x_{j+1/2} < u_{j+1} t) \\ (x - x_{j+1/2})/t, & (u_{j+1} t < x - x_{j+1/2} < u_j t) \\ u_{j+1}, & (u_j t < x - x_{j+1/2}) \end{cases} \quad (4.68)$$

となる。

Over turned の圧縮波になるばあいは、 $x_{j+1/2}$ における物理量は、

$$\bar{u}_{j+1/2} = \begin{cases} u_j, & (u_j > u_{j+1} > 0) \\ \text{over turned}, & (u_j > 0 > u_{j+1}) \\ u_{j+1}, & (0 > u_j > u_{j+1}) \end{cases} \quad (4.69)$$

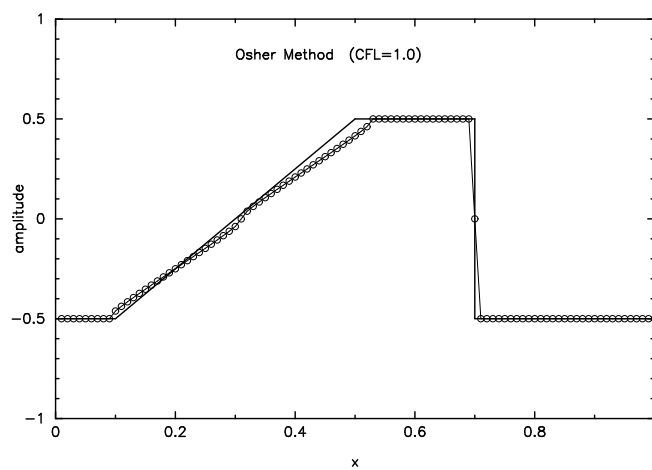
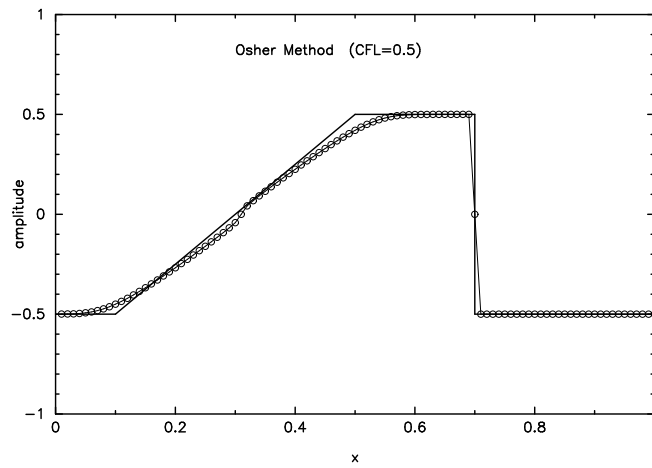
となり、真中の場合 ($u_j > 0 > u_{j+1}$) は物理量を決定できないので、直接数値流束を決定する。

$$\begin{aligned} d(u, v) &= \int_u^v |a(w)| dw \\ &= \int_u^0 w dw + \int_0^v (-w) dw \\ &= -\frac{1}{2}u^2 - \frac{1}{2}v^2 \end{aligned} \quad (4.70)$$

より、

$$\bar{f}_{j+1/2} = \begin{cases} \frac{1}{2}u_j^2, & (u_j > u_{j+1} > 0) \\ \frac{1}{2}(u_j^2 + u_{j+1}^2), & (u_j > 0 > u_{j+1}) \\ \frac{1}{2}u_{j+1}^2, & (0 > u_j > u_{j+1}) \end{cases} \quad (4.71)$$

となる。このようにして、Osher 法で2番目のテスト問題を解いた結果を次に示す。



結果は、Godunov 法の結果と非常に良く似ている。ただ、違いは Osher 法が衝撃波を over turned の圧縮波で置き換えることだけであるが、それによる悪影響はほとんど見られない。

4.5 Roe 法

Roe 法は、非線形方程式を $(j, j+1)$ の区間で局所的に線形化し、その後にリーマン問題を厳密に解こうとする方法である。いま、 $(j, j+1)$ で線形化した方程式を

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad (4.72)$$

と置く。ここで、 a は

$$\bar{f}_{j+1} - \bar{f}_j = a(u_j, u_{j+1})(u_{j+1} - u_j), \quad (4.73)$$

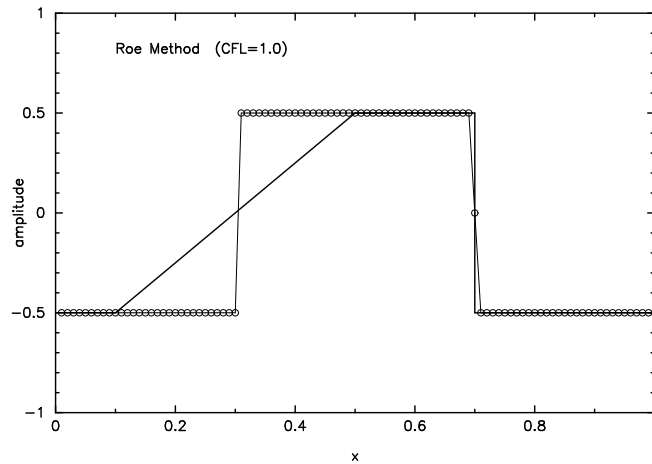
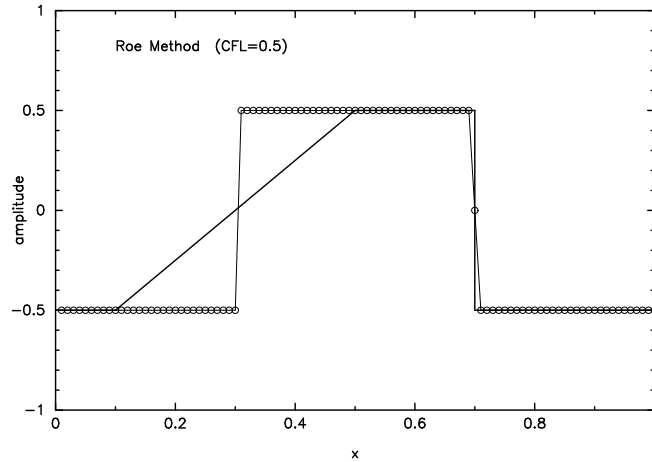
を満たすように決める必要がある。非粘性 Burgers 方程式の場合は、

$$a(u_j, u_{j+1}) = \frac{1}{2}(u_j + u_{j+1}), \quad (4.74)$$

となる。したがって、 $x_{j+1/2}$ での物理量は、

$$u_{j+1/2} = \begin{cases} u_j, & (a > 0) \\ u_{j+1}, & (a < 0) \end{cases} \quad (4.75)$$

となり、このようにして求めた $u_{j+1/2}$ を使って数値流束を計算できる。このようにして、問題 2 を解いた結果が次の図である。



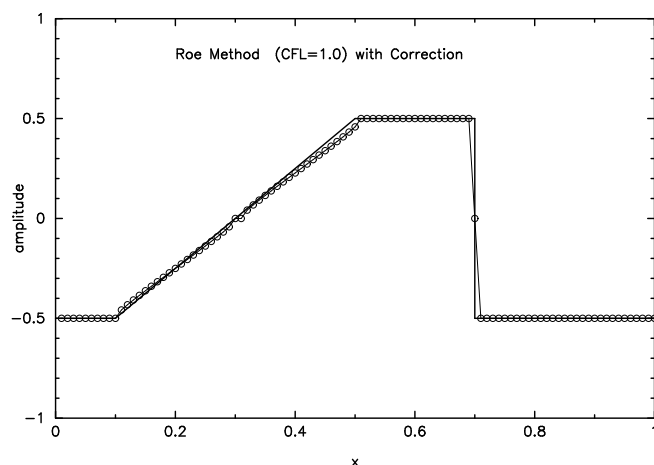
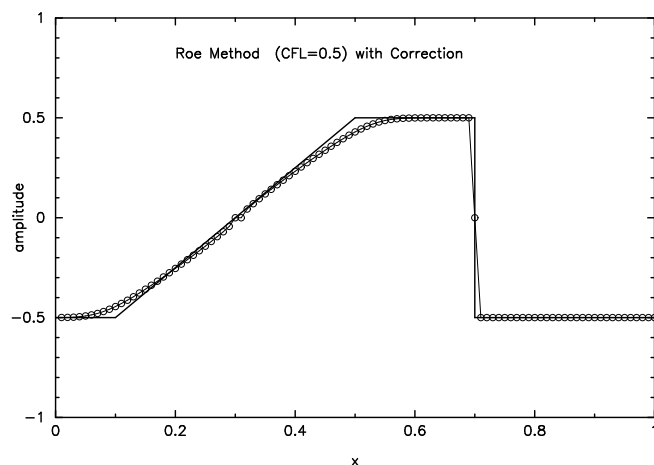
Roe 法では、数値流束の形を見ても明らかなように、衝撃波と膨張波での区別がない。したがって、特性速度がゼロになる場所で、膨張波は膨張衝撃波になる。これは、特性速度がゼロになる場所では、打ち切り誤差からくる、数値的な粘性がゼロになるからである。特性速度がゼロになる場合に、特性速度に修正を施して有限の値にし、こうして数値粘性を導入する。これは、式 (4.62) における特性速度 a を

$$a \longrightarrow \psi(a) = \begin{cases} |a|, & (|a| > \varepsilon) \\ \sqrt{(a^2 + \varepsilon^2)/2\varepsilon^2}, & (|a| < \varepsilon) \end{cases} \quad (4.76)$$

と置き換えれば良い。したがって、 $x_{j+1/2}$ での数値流束は、

$$\bar{f}_{j+1/2} = \begin{cases} \frac{1}{2}u_j^2, & (a > \varepsilon) \\ \frac{1}{4}(u_j^2 + u_{j+1}^2 - 2\psi(a)(u_{j+1} - u_j)), & (|a| < \varepsilon) \\ \frac{1}{2}u_{j+1}^2, & (a < -\varepsilon) \end{cases} \quad (4.77)$$

となる。このようにして計算した結果を下図に示す。



4.6 van Leer の Flux Vector Splitting 法

van Leer の Flux Vector Splitting 法では、数値流束が

$$d(u, v) = \frac{1}{2} [|a(u)| + |a(v)|] (v - u), \quad (4.78)$$

で与えられるので、 $u_j > u_{j+1}$ の衝撃波の領域では、

$$\bar{d}_{j+1/2} = \begin{cases} \frac{1}{2}(u_{j+1}^2 - u_j^2), & (u_j > u_{j+1} > 0) \\ -\frac{1}{2}(u_j - u_{j+1})^2, & (u_j > 0 > u_{j+1}) \\ \frac{1}{2}(u_j^2 - u_{j+1}^2), & (0 > u_j > u_{j+1}) \end{cases} \quad (4.79)$$

となる。したがって、数値流束は

$$\bar{f}_{j+1/2} = \begin{cases} \frac{1}{2}u_j^2, & (u_j > u_{j+1} > 0) \\ \frac{1}{2}(u_j^2 - u_j u_{j+1} + u_{j+1}^2), & (u_j > 0 > u_{j+1}) \\ \frac{1}{2}u_{j+1}^2, & (0 > u_j > u_{j+1}) \end{cases} \quad (4.80)$$

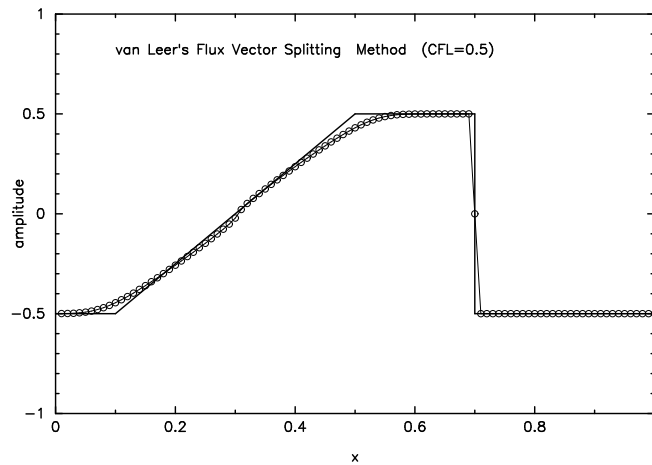
となる。逆に、 $u_j < u_{j+1}$ の膨張波の領域では、

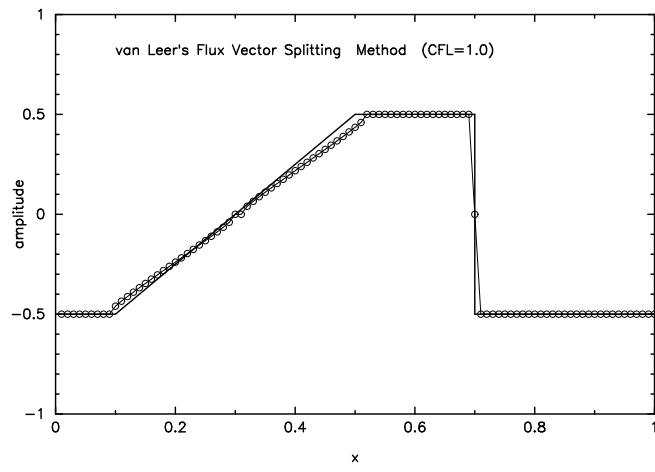
$$\bar{d}_{j+1/2} = \begin{cases} \frac{1}{2}(u_{j+1}^2 - u_j^2), & (0 < u_j < u_{j+1}) \\ \frac{1}{2}(u_j - u_{j+1})^2, & (u_j < 0 < u_{j+1}) \\ \frac{1}{2}(u_j^2 - u_{j+1}^2), & (u_j < u_{j+1} < 0) \end{cases} \quad (4.81)$$

となるので、数値流束は、

$$\bar{f}_{j+1/2} = \begin{cases} \frac{1}{2}u_j^2, & (0 < u_j < u_{j+1}) \\ \frac{1}{2}u_j u_{j+1}, & (u_j < 0 < u_{j+1}) \\ \frac{1}{2}u_{j+1}^2, & (u_j < u_{j+1} < 0) \end{cases} \quad (4.82)$$

となる。これらは、超音速の部分 ($u_j > u_{j+1} > 0$ など) では完全な風上差分法になっているが、遷音速の部分 ($u_j > 0 > u_{j+1}$ など) では、Riemann 解を簡略化したために、不十分な取り扱いとなっている。(超音速の部分では、Osher 法や Roe 法なども含め、すべての Godunov 型のスキームは完全風上差分になっている。) この不十分さのために、種々の短所が現われることに、注意する必要がある。





第5章 高精度風上差分法と TVD

今まで、説明してきた、線形 Godunov 法や、Godunov 法、Osher 法、Roe 法などは、すべて、1次精度風上差分法である。1次精度風上差分法は、線形 Godunov 法に見られるように、TVD である。しかし、空間について、1次精度であることから、物理量の跳びがある場合に、解が鈍ってしまうという性質があった。空間1次精度を、Lax-Wendroff 法のように、2次精度にすれば、この数値粘性からくる鈍りは大きく減少し、鋭い解が得られると思われる。この章では、1次精度風上差分法を2次精度風上差分法にするにはどうするか、しかも、非物理的な振動など出ないように、TVD の考え型に則って、差分式をどう作るかを説明する。

5.1 2次精度風上差分法 — MUSCL

前章でも述べたように、単調なスキームを作れば、自動的に TVD は保証される。保存形の任意の3点スキームは、

$$\begin{aligned} \frac{\Delta t}{\Delta x} [\bar{f}(u_{j-1}^n, u_j^n) - \bar{f}(u_j^n, u_j^n)] &= -C_{j-1/2}^+(u_j^n - u_{j-1}^n) \\ &\equiv -C_{j-1/2}^+ \Delta_{j-1/2} u^n, \end{aligned} \quad (5.1)$$

$$\begin{aligned} \frac{\Delta t}{\Delta x} [\bar{f}(u_j^n, u_{j+1}^n) - \bar{f}(u_j^n, u_j^n)] &= -D_{j+1/2}^-(u_{j+1}^n - u_j^n) \\ &\equiv -D_{j+1/2}^- \Delta_{j+1/2} u^n, \end{aligned} \quad (5.2)$$

と置けば、

$$\begin{aligned} u_j^{n+1} &= u_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} [\bar{f}(u_j^n, u_{j+1}^n) - \bar{f}(u_{j-1}^n, u_j^n)] \\ &= u_j^n - C_{j-1/2}^+ \Delta_{j-1/2} u^n + D_{j+1/2}^- \Delta_{j+1/2} u^n \\ &= C_{j-1/2}^+ u_{j-1}^n + (1 - C_{j-1/2}^+ - D_{j+1/2}^-) u_j^n \\ &\quad + D_{j+1/2}^- u_{j+1}^n, \end{aligned} \quad (5.3)$$

と表せるので、Harten の補助定理によると、

$$C_{j-1/2}^+ \geq 0, \quad D_{j+1/2}^- \geq 0, \quad 1 - C_{j-1/2}^+ - D_{j+1/2}^- \geq 0, \quad (5.4)$$

を満たせば、TVD (十分条件) となる。条件 (5.4) を満たす保存則スキームは TVD であり、単調性を保存するから、数値振動の発生しない解を維持できることになる。したがって、TVD であるような高精度風上差分法のスキームを作るには、差分式を条件 (5.4) を満たすように構成すれば良い。

この章では、定数係数のスカラー波動方程式、すなわち、

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad (a = \text{const.}) \quad (5.5)$$

を考える。定数係数スカラー波動方程式の1次精度風上差分法は、線形 Godunov 法そのものだから、

$$a^- \equiv \min(a, 0) = \frac{1}{2}(a - |a|), \quad (5.6)$$

$$a^+ \equiv \max(a, 0) = \frac{1}{2}(a + |a|), \quad (5.7)$$

として、

$$\begin{aligned} u_j^{n+1} &= u_j^n - \lambda \left\{ a^+ (u_j^n - u_{j-1}^n) + a^- (u_{j+1}^n - u_j^n) \right\} \\ &= \lambda(-a^-)u_{j+1}^n + (1 - \lambda|a|)u_j^n + \lambda a^+ u_{j-1}^n \\ &= u_j^n - \lambda (a^+ u_j^n + a^- u_{j+1}^n - a^+ u_{j-1}^n - a^- u_j^n) \\ &= u_j^n - \lambda (\bar{f}_{j+1/2}^n - \bar{f}_{j-1/2}^n), \end{aligned} \quad (5.8)$$

と書き直すことができる。ここで、

$$\bar{f}_{j+1/2}^n = a^+ u_j^n + a^- u_{j+1}^n, \quad (5.9)$$

$$\bar{f}_{j-1/2}^n = a^+ u_{j-1}^n + a^- u_j^n, \quad (5.10)$$

である。 $x = x_{j+1/2}$ における、数値流束 (numerical flux) $\bar{f}_{j+1/2}$ の決め方は、特性速度 a が正の時は、 x の小さい方の値 u_j を使って数値流束を計算し、 a が負の時は、 x の大きい方の値 u_{j+1} を使って数値流束を計算するという、風が吹いて来る方向の (すなわち、上流側の) 値を採用して、流束を決定するという風上差分法の考え方に則っている。

1次精度風上差分法では、区間 $(x_{j-1/2}, x_{j+1/2})$ で、物理量の分布は一定である、すなわち、この区間では、物理量は u_j という値をとっている、という仮定のもとで、数値流束を計算していた。高次精度風上差分法を考えるということは、この区間 (これを通常、cell という) 内の物理量の分布を一定ではなく、なんらかの分布を持たせることを意味する。ここでは、van Leer によって提案された **MUSCL** (Monotone Upstream Scheme for Conservation Law) のやりかたに沿って、この問題を考えていく。2次精度風上差分法の場合、この分布は一定の傾きを持った直線で表せるとする。したがって、セル境界 $x_{j-1/2}$ および、 $x_{j+1/2}$ における物理量は、

$$\begin{aligned} u_{j+1/2}^L &= u_j + \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \right)_j \frac{\Delta x}{2} \\ &= u_j + M(\Delta_{j-1/2} u, \Delta_{j+1/2} u) \\ &= u_j + M(u_{j-1}, u_j, u_{j+1}), \end{aligned} \quad (5.11)$$

$$\begin{aligned} u_{j+1/2}^R &= u_{j+1} - \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \right)_{j+1} \frac{\Delta x}{2} \\ &= u_{j+1} - N(\Delta_{j+1/2} u, \Delta_{j+3/2} u) \end{aligned}$$

$$= u_{j+1} - N(u_j, u_{j+1}, u_{j+2}), \quad (5.12)$$

$$\begin{aligned} u_{j-1/2}^L &= u_{j-1} + \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \right)_{j-1} \frac{\Delta x}{2} \\ &= u_{j-1} + M(\Delta_{j-3/2}u, \Delta_{j-1/2}u) \\ &= u_{j-1} + M(u_{j-2}, u_{j-1}, u_j), \end{aligned} \quad (5.13)$$

$$\begin{aligned} u_{j-1/2}^R &= u_j - \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \right)_j \frac{\Delta x}{2} \\ &= u_j - N(\Delta_{j-1/2}u, \Delta_{j+1/2}u) \\ &= u_j - N(u_{j-1}, u_j, u_{j+1}), \end{aligned} \quad (5.14)$$

ここで、 $u_{j+1/2}^L$ および $u_{j+1/2}^R$ は、セル境界 $x_{j+1/2}$ における左右の物理量の値を表し、

$$\Delta_{j+1/2}u \equiv u_{j+1} - u_j, \quad (5.15)$$

である。したがって、差分式は、

$$\begin{aligned} Lu_j &= u_j^n - \lambda (\bar{f}_{j+1/2}^n - \bar{f}_{j-1/2}^n) \\ &= u_j - \lambda (a^+ u_{j+1/2}^L + a^- u_{j+1/2}^R - a^+ u_{j-1/2}^L - a^- u_{j-1/2}^R) \\ &= u_j - \lambda (a^+ u_j + a^+ M(\Delta_{j-1/2}u, \Delta_{j+1/2}u) \\ &\quad + a^- u_{j+1} - a^- N(\Delta_{j+1/2}u, \Delta_{j+3/2}u) \\ &\quad - a^+ u_{j-1} - a^+ M(\Delta_{j-3/2}u, \Delta_{j-1/2}u) \\ &\quad - a^- u_j + a^- N(\Delta_{j-1/2}u, \Delta_{j+1/2}u)) \\ &= u_j - \lambda a^+ (\Delta_{j-1/2}u + M(\Delta_{j-1/2}u, \Delta_{j+1/2}u) \\ &\quad - M(\Delta_{j-3/2}u, \Delta_{j-1/2}u)) \\ &\quad + \lambda (-a^-) (\Delta_{j+1/2}u - N(\Delta_{j+1/2}u, \Delta_{j+3/2}u) \\ &\quad + N(\Delta_{j-1/2}u, \Delta_{j+1/2}u)) \\ &= u_j - \lambda a^+ \left(1 + \frac{M(\Delta_{j-1/2}u, \Delta_{j+1/2}u)}{\Delta_{j-1/2}u} \right. \\ &\quad \left. - \frac{M(\Delta_{j-3/2}u, \Delta_{j-1/2}u)}{\Delta_{j-1/2}u} \right) \Delta_{j-1/2}u \\ &\quad + \lambda (-a^-) \left(1 - \frac{N(\Delta_{j+1/2}u, \Delta_{j+3/2}u)}{\Delta_{j+1/2}u} \right. \\ &\quad \left. + \frac{N(\Delta_{j-1/2}u, \Delta_{j+1/2}u)}{\Delta_{j+1/2}u} \right) \Delta_{j+1/2}u, \end{aligned} \quad (5.16)$$

となる。したがって、

$$C_{j-1/2}^+ = \lambda a^+ \left(1 + \frac{M(\Delta_{j-1/2}u, \Delta_{j+1/2}u)}{\Delta_{j-1/2}u} - \frac{M(\Delta_{j-3/2}u, \Delta_{j-1/2}u)}{\Delta_{j-1/2}u} \right), \quad (5.17)$$

$$D_{j+1/2}^- = \lambda(-a^-) \left(1 - \frac{N(\Delta_{j+1/2}u, \Delta_{j+3/2}u)}{\Delta_{j+1/2}u} + \frac{N(\Delta_{j-1/2}u, \Delta_{j+1/2}u)}{\Delta_{j+1/2}u} \right), \quad (5.18)$$

となる。

次に、物理量の勾配を与えるために、以下のような関数 $\text{minmod}()$ を定義する。

$$\text{minmod}(a, b) = \begin{cases} 0, & (a \cdot b \leq 0) \\ \text{sgn}(a) \cdot \min(|a|, |b|), & (a \cdot b > 0) \end{cases} \quad (5.19)$$

この関数は、 a と b が異符号なら、ゼロを与え、同符号なら、絶対値の小さい方を採用するものである。この $\text{minmod}()$ 関数を使って、物理量の勾配を、

$$M(\Delta_{j-1/2}u, \Delta_{j+1/2}u) = \frac{1}{2} \text{minmod}(\Delta_{j-1/2}u, \Delta_{j+1/2}u), \quad (5.20)$$

$$N(\Delta_{j+1/2}u, \Delta_{j+3/2}u) = \frac{1}{2} \text{minmod}(\Delta_{j+1/2}u, \Delta_{j+3/2}u), \quad (5.21)$$

$$M(\Delta_{j-3/2}u, \Delta_{j-1/2}u) = \frac{1}{2} \text{minmod}(\Delta_{j-3/2}u, \Delta_{j-1/2}u), \quad (5.22)$$

$$N(\Delta_{j-1/2}u, \Delta_{j+1/2}u) = \frac{1}{2} \text{minmod}(\Delta_{j-1/2}u, \Delta_{j+1/2}u), \quad (5.23)$$

などとする。

最初に、特性速度が正、すなわち、 $a^+ \neq 0$ で、 $a^- = 0$ の場合を考える。この時は、

$$C_{j-1/2}^+ = \lambda a^+ \left\{ 1 + \frac{\text{minmod}(\Delta_{j-1/2}u, \Delta_{j+1/2}u)}{2\Delta_{j-1/2}u} - \frac{\text{minmod}(\Delta_{j-3/2}u, \Delta_{j-1/2}u)}{2\Delta_{j-1/2}u} \right\}, \quad (5.24)$$

$$D_{j+1/2}^- = 0, \quad (5.25)$$

となり、上式の $\{ \}$ の中が、

$$\frac{1}{2} \leq 1 + \frac{\text{minmod}(\Delta_{j-1/2}u, \Delta_{j+1/2}u)}{2\Delta_{j-1/2}u} - \frac{\text{minmod}(\Delta_{j-3/2}u, \Delta_{j-1/2}u)}{2\Delta_{j-1/2}u} \leq \frac{3}{2}, \quad (5.26)$$

となる。ここで、左側の不等号は、 $\Delta_{j-1/2}u$ と $\Delta_{j+1/2}u$ が異符号で、かつ、 $\Delta_{j-3/2}u$ と $\Delta_{j-1/2}u$ が同符号で、 $|\Delta_{j-1/2}u| \leq |\Delta_{j-3/2}u|$ という場合に相当する。右側の不等号は、 $\Delta_{j-3/2}u$ と $\Delta_{j-1/2}u$ が異符号で、かつ、 $\Delta_{j-1/2}u$ と $\Delta_{j+1/2}u$ が同符号で、 $|\Delta_{j-1/2}u| \leq |\Delta_{j+1/2}u|$ という場合に相当する。

したがって、

$$C_{j-1/2}^+ > 0, \quad (5.27)$$

の条件は自動的に満たされ、

$$C_{j-1/2}^+ \leq 1, \quad (5.28)$$

の条件から、

$$\frac{3}{2}\lambda a^+ \leq 1, \quad (5.29)$$

が TVD であるための条件になる。この条件を書き直せば、

$$\frac{\Delta t}{\Delta x} \leq \frac{2}{3a^+}, \quad (5.30)$$

となり、CFL 条件よりは、時間刻み Δt を厳しく制限する。

次に、特性速度が負、すなわち、 $a^+ = 0$ で、 $a^- \neq 0$ の場合を考える。この時は、

$$C_{j-1/2}^+ = 0, \quad (5.31)$$

$$D_{j+1/2}^- = \lambda(-a^-) \left\{ 1 - \frac{\min\text{mod}(\Delta_{j+1/2}u, \Delta_{j+3/2}u)}{2\Delta_{j+1/2}u} + \frac{\min\text{mod}(\Delta_{j-1/2}u, \Delta_{j+1/2}u)}{2\Delta_{j+1/2}u} \right\}, \quad (5.32)$$

となり、上式の $\{ \}$ の中が、

$$\frac{1}{2} \leq 1 - \frac{\min\text{mod}(\Delta_{j+1/2}u, \Delta_{j+3/2}u)}{2\Delta_{j+1/2}u} + \frac{\min\text{mod}(\Delta_{j-1/2}u, \Delta_{j+1/2}u)}{2\Delta_{j+1/2}u} \leq \frac{3}{2}, \quad (5.33)$$

となる。ここで、左側の不等号は、 $\Delta_{j-1/2}u$ と $\Delta_{j+1/2}u$ が異符号で、かつ、 $\Delta_{j+1/2}u$ と $\Delta_{j+3/2}u$ が同符号で、 $|\Delta_{j+1/2}u| \leq |\Delta_{j+3/2}u|$ という場合に相当する。右側の不等号は、 $\Delta_{j+1/2}u$ と $\Delta_{j+3/2}u$ が異符号で、かつ、 $\Delta_{j-1/2}u$ と $\Delta_{j+1/2}u$ が同符号で、 $|\Delta_{j+1/2}u| \leq |\Delta_{j-1/2}u|$ という場合に相当する。

したがって、

$$D_{j+1/2}^- > 0, \quad (5.34)$$

の条件は自動的に満たされ、

$$D_{j+1/2}^- \leq 1, \quad (5.35)$$

の条件から、

$$\frac{3}{2}\lambda(-a^-) \leq 1, \quad (5.36)$$

が TVD であるための条件になる。この条件を書き直せば、

$$\frac{\Delta t}{\Delta x} \leq \frac{2}{3(-a^-)}, \quad (5.37)$$

となる。特性速度の正負の場合を、併せて

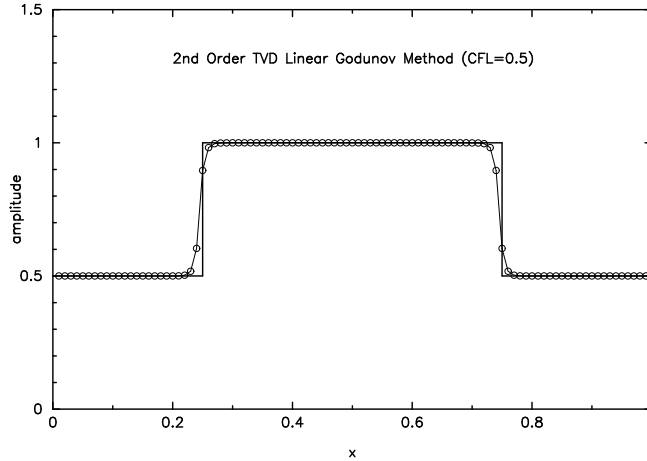
$$\lambda \leq \frac{2}{3|a|}, \quad (5.38)$$

あるいは、

$$\text{CFL} \equiv |a| \frac{\Delta t}{\Delta x} \leq \frac{2}{3}, \quad (5.39)$$

と書ける。

条件 (5.38) の下で、実際にテスト問題 1 を CFL 数を 0.5 にして積分したのが、下の図である。CFL 数が 0.5 というのは、条件 (5.38) を満たしている。



1 次精度の線形 Godunov 法の結果と比べてみると、 u の跳びのあるところ、つまり、接触不連続面に相当するところでの鈍りが画期的に解決されているのが分かるであろう。

実は、後で述べるように、単調な物理量の分布を与えるには、`minmod()` 関数の中の条件をもうちょっと緩めることができる。これを **compression parameter** あるいは、**compression factor** と呼ばれる、 $\omega \geq 1$ を導入することで、行なう。物理量の勾配を、

$$M(\Delta_{j-1/2}u, \omega\Delta_{j+1/2}u) = \frac{1}{2} \min\text{mod}(\Delta_{j-1/2}u, \omega\Delta_{j+1/2}u), \quad (5.40)$$

$$N(\omega\Delta_{j+1/2}u, \Delta_{j+3/2}u) = \frac{1}{2} \min\text{mod}(\omega\Delta_{j+1/2}u, \Delta_{j+3/2}u), \quad (5.41)$$

$$M(\Delta_{j-3/2}u, \omega\Delta_{j-1/2}u) = \frac{1}{2} \min\text{mod}(\Delta_{j-3/2}u, \omega\Delta_{j-1/2}u), \quad (5.42)$$

$$N(\omega\Delta_{j-1/2}u, \Delta_{j+1/2}u) = \frac{1}{2} \min\text{mod}(\omega\Delta_{j-1/2}u, \Delta_{j+1/2}u), \quad (5.43)$$

とする。

特性速度が正ならば、

$$\begin{aligned} C_{j-1/2}^+ &= \lambda a^+ \left(1 + \frac{M(\Delta_{j-1/2}u, \omega\Delta_{j+1/2}u)}{\Delta_{j-1/2}u} \right. \\ &\quad \left. - \frac{M(\Delta_{j-3/2}u, \omega\Delta_{j-1/2}u)}{\Delta_{j-1/2}u} \right) \\ &= \lambda a^+ \left\{ 1 + \frac{\min\text{mod}(\Delta_{j-1/2}u, \omega\Delta_{j+1/2}u)}{2\Delta_{j-1/2}u} \right. \\ &\quad \left. - \frac{\min\text{mod}(\Delta_{j-3/2}u, \omega\Delta_{j-1/2}u)}{2\Delta_{j-1/2}u} \right\}, \end{aligned} \quad (5.44)$$

$$D_{j+1/2}^- = 0, \quad (5.45)$$

となり、上式の $\{\}$ の中が、

$$1 - \frac{\omega}{2} \leq 1 + \frac{\min\text{mod}(\Delta_{j-1/2}u, \omega\Delta_{j+1/2}u)}{2\Delta_{j-1/2}u} - \frac{\min\text{mod}(\Delta_{j-3/2}u, \omega\Delta_{j-1/2}u)}{2\Delta_{j-1/2}u} \leq \frac{3}{2}, \quad (5.46)$$

となる。ここで、左側の不等号は、 $\Delta_{j-1/2}u$ と $\Delta_{j+1/2}u$ が異符号で、かつ、 $\Delta_{j-3/2}u$ と $\Delta_{j-1/2}u$ が同符号で、 $\omega|\Delta_{j-1/2}u| \leq |\Delta_{j-3/2}u|$ という場合に相当する。右側の不等号は、 $\Delta_{j-3/2}u$ と $\Delta_{j-1/2}u$ が異符号で、かつ、 $\Delta_{j-1/2}u$ と $\Delta_{j+1/2}u$ が同符号で、 $|\Delta_{j-1/2}u| \leq \omega|\Delta_{j+1/2}u|$ という場合に相当する。

したがって、

$$C_{j-1/2}^+ \geq 0, \quad (5.47)$$

の条件から、

$$1 - \frac{\omega}{2} \geq 0, \quad (5.48)$$

が、すなわち、

$$1 \leq \omega \leq 2, \quad (5.49)$$

が出て来る。

$$C_{j-1/2}^+ \leq 1, \quad (5.50)$$

の条件から、

$$\frac{3}{2}\lambda a^+ \leq 1, \quad (5.51)$$

が出て来るので、

$$\frac{\Delta t}{\Delta x} \leq \frac{2}{3a^+}, \quad (5.52)$$

となり、 ω の導入は TVD 条件に影響を与えない。つまり、時間刻み Δt についての制限は同じである。

特性速度が負の場合は、

$$C_{j-1/2}^+ = 0, \quad (5.53)$$

$$\begin{aligned} D_{j+1/2}^- &= \lambda(-a^-) \left(1 - \frac{N(\omega\Delta_{j+1/2}u, \Delta_{j+3/2}u)}{\Delta_{j+1/2}u} + \frac{N(\omega\Delta_{j-1/2}u, \Delta_{j+1/2}u)}{\Delta_{j+1/2}u} \right) \\ &= \lambda(-a^-) \left\{ 1 - \frac{\min\text{mod}(\omega\Delta_{j+1/2}u, \Delta_{j+3/2}u)}{2\Delta_{j+1/2}u} + \frac{\min\text{mod}(\omega\Delta_{j-1/2}u, \Delta_{j+1/2}u)}{2\Delta_{j+1/2}u} \right\}, \end{aligned} \quad (5.54)$$

となり、上式の $\{\}$ の中が、

$$1 - \frac{\omega}{2} \leq 1 - \frac{\min\text{mod}(\omega\Delta_{j+1/2}u, \Delta_{j+3/2}u)}{2\Delta_{j+1/2}u}$$

$$+\frac{\min\text{mod}(\omega\Delta_{j-1/2}u, \Delta_{j+1/2}u)}{2\Delta_{j+1/2}u} \leq \frac{3}{2}, \quad (5.55)$$

となる。ここで、左側の不等号は、 $\Delta_{j-1/2}u$ と $\Delta_{j+1/2}u$ が異符号で、かつ、 $\Delta_{j+1/2}u$ と $\Delta_{j+3/2}u$ が同符号で、 $\omega|\Delta_{j+1/2}u| \leq |\Delta_{j+3/2}u|$ という場合に相当する。右側の不等号は、 $\Delta_{j+1/2}u$ と $\Delta_{j+3/2}u$ が異符号で、かつ、 $\Delta_{j-1/2}u$ と $\Delta_{j+1/2}u$ が同符号で、 $|\Delta_{j+1/2}u| \leq \omega|\Delta_{j-1/2}u|$ という場合に相当する。

したがって、

$$D_{j+1/2}^- \geq 0, \quad (5.56)$$

の条件から、

$$1 - \frac{\omega}{2} \geq 0, \quad (5.57)$$

が、すなわち、

$$1 \leq \omega \leq 2, \quad (5.58)$$

が出て来る。

$$D_{j+1/2}^- \leq 1, \quad (5.59)$$

の条件から、

$$\frac{3}{2}\lambda(-a^-) \leq 1, \quad (5.60)$$

が出て来る。これは、

$$\frac{\Delta t}{\Delta x} \leq \frac{2}{3(-a^-)}, \quad (5.61)$$

となり、compression parameter を導入しても変化しない。特性速度の正負の場合を、併せて

$$1 \leq \omega \leq 2, \quad (5.62)$$

および、

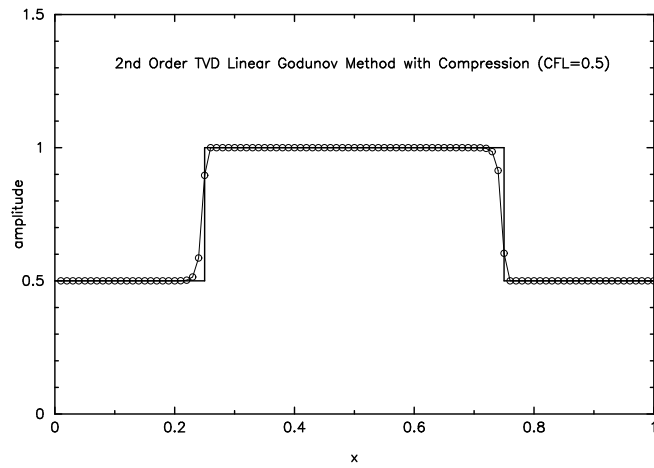
$$\lambda \leq \frac{2}{3|a|}, \quad (5.63)$$

あるいは、

$$\text{CFL} \equiv |a| \frac{\Delta t}{\Delta x} \leq \frac{2}{3}, \quad (5.64)$$

が TVD の条件となる。

条件 (5.63) の元で、実際にテスト問題 1 を CFL 数を 0.5 にして積分したのが、下の図である。CFL 数が 0.5 というのは、条件 (5.63) を満たしている。



compression parameter を導入しても、この場合はあまり変化はない。これは、compression parameter を導入する以前に u の跳びが 1 mesh か 2 meshes で捉えられているので、これ以上の改善が見られなかったと思われる。

第6章 高精度差分法の TVD 化

Lax-Wendroff 法は2次精度の計算法であるが、衝撃波や接触不連続面で本来なら存在しない、好ましからぬ振動が現われてしまう。これを取り除く方法として、TVD の考え方は導入された。単調なスキームを作れば、自動的に TVD は保証される。保存形の任意の3点スキームは、

$$\begin{aligned} \frac{\Delta t}{\Delta x} [\bar{f}(u_{j-1}^n, u_j^n) - \bar{f}(u_j^n, u_j^n)] &= -C_{j-1/2}^+(u_j^n - u_{j-1}^n) \\ &\equiv -C_{j-1/2}^+ \Delta_{j-1/2} u^n, \end{aligned} \quad (6.1)$$

$$\begin{aligned} \frac{\Delta t}{\Delta x} [\bar{f}(u_j^n, u_{j+1}^n) - \bar{f}(u_j^n, u_j^n)] &= -D_{j+1/2}^-(u_{j+1}^n - u_j^n) \\ &\equiv -D_{j+1/2}^- \Delta_{j+1/2} u^n, \end{aligned} \quad (6.2)$$

と置けば、

$$\begin{aligned} u_j^{n+1} &= u_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} [\bar{f}(u_j^n, u_{j+1}^n) - \bar{f}(u_{j-1}^n, u_j^n)] \\ &= u_j^n - C_{j-1/2}^+ \Delta_{j-1/2} u^n + D_{j+1/2}^- \Delta_{j+1/2} u^n \\ &= C_{j-1/2}^+ u_{j-1}^n + (1 - C_{j-1/2}^+ - D_{j+1/2}^-) u_j^n \\ &\quad + D_{j+1/2}^- u_{j+1}^n, \end{aligned} \quad (6.3)$$

と表せるので、Harten の補助定理によると、

$$C_{j-1/2}^+ \geq 0, \quad D_{j+1/2}^- \geq 0, \quad 1 - C_{j-1/2}^+ - D_{j+1/2}^- \geq 0, \quad (6.4)$$

を満たせば、TVD (十分条件) となる。条件 (6.4) を満たす保存則スキームは TVD であり、単調性を保存するから、数値振動の発生しない衝撃波解を維持できることになる。したがって、TVD 高精度スキームを作るには、差分式を条件 (6.4) を満たすように構成すれば良い。

6.1 Lax-Wendroff 法の TVD 化

6.1.1 正の特性速度を持つ定数係数スカラー方程式の場合

最初に定数係数のスカラー方程式、

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad (c > 0) \quad (6.5)$$

を考える。ここで、CFL 数を

$$\nu = c \frac{\Delta t}{\Delta x} > 0, \quad (6.6)$$

とおけば、Lax-Wendroff 法は、

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{1}{2}\nu (u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) + \frac{1}{2}\nu^2 (u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n), \quad (6.7)$$

と置けるので、これを強引に

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \nu \left\{ 1 + \frac{1}{2} (1 - \nu) \left[\frac{\phi(r_j^+)}{r_j^+} - \phi(r_{j-1}^+) \right] \right\} \Delta_{j-1/2} u^n, \quad (6.8)$$

としてしまう。ここで、

$$r_j^+ \equiv \frac{\Delta_{j-1/2} u^n}{\Delta_{j+1/2} u^n}, \quad (6.9)$$

である。 $\phi(r) = 1$ ならば、Lax-Wendroff 法になるし、 $\phi(r) = r$ ならば、Warming-Beam 法になる。Warming-Beam 法はここではやらないが。さて、これを式 (6.3) と式 (6.4) に代入すると、

$$C_{j-1/2}^+ = \nu \left\{ 1 + \frac{1}{2} (1 - \nu) \left[\frac{\phi(r_j^+)}{r_j^+} - \phi(r_{j-1}^+) \right] \right\}, \quad (6.10)$$

$$D_{j+1/2}^- = 0, \quad (6.11)$$

となり、 $0 < \nu < 1$ という CFL 条件を考えると、

$$\left| \frac{\phi(r_j^+)}{r_j^+} - \phi(r_{j-1}^+) \right| \leq 2, \quad (6.12)$$

が TVD 条件を満たすための十分条件になることはすぐに分かる。さらに、 $\phi(r) > 0$, for $r > 0$ 、および $\phi(r) = 0$, for $r < 0$ という制限を $\phi(r)$ に加えることにすれば、

$$0 \leq \frac{\phi(r)}{r} \leq 2, \quad (6.13)$$

および、

$$0 \leq \phi(r) \leq 2, \quad (6.14)$$

が TVD の十分条件になる。ここで、 ϕ は流束に対する制限を与えているので、**流束制限関数 (flux limiter)** と呼ばれる。一般に Lax-Wendroff 法は条件 (6.14) は満たしているが、条件 (6.13) を満たしていないので TVD ではない。

ここで、Lax-Wendroff 法の差分式にある項を追加して、全体として TVD となるように修正することを考える。今、その追加項を

$$\begin{aligned} u_j^{n+1} &= u_j^n - \frac{1}{2}\nu (u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) + \frac{1}{2}\nu^2 (u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n) \\ &+ K_{j+1/2}^+(r_j^+) \Delta_{j+1/2} u^n - K_{j-1/2}^+(r_{j-1}^+) \Delta_{j-1/2} u^n, \end{aligned} \quad (6.15)$$

と置くと、まとめて

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \left(\nu \left\{ 1 + \frac{1}{2} (1 - \nu) \left[\frac{1}{r_j^+} - 1 \right] \right\} \right)$$

$$- \left\{ \frac{K_{j+1/2}^+(r_j^+)}{r_j^+} - K_{j-1/2}^+(r_{j-1}^+) \right\} \Delta_{j-1/2} u^n, \quad (6.16)$$

となり、結局、

$$C_{j-1/2}^+ = \nu \left\{ 1 + \frac{1}{2} (1 - \nu) \left[\frac{1}{r_j^+} - 1 \right] \right\} - \left\{ \frac{K_{j+1/2}^+(r_j^+)}{r_j^+} - K_{j-1/2}^+(r_{j-1}^+) \right\}, \quad (6.17)$$

$$D_{j+1/2}^- = 0, \quad (6.18)$$

となる。ここで、式 (6.8) および式 (6.10) と比較して、

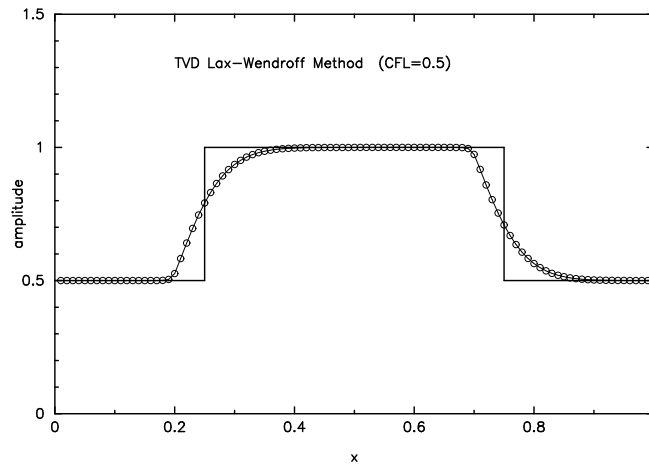
$$K_{j+1/2}^+ = \frac{\nu}{2} (1 - \nu) [1 - \phi(r_j^+)], \quad (6.19)$$

を得る。条件 (6.13) と条件 (6.14) は、

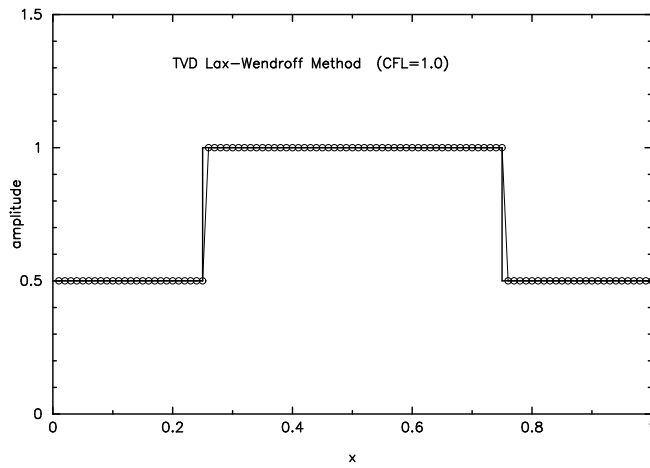
$$\phi(r) = \begin{cases} \min(2r, 1), & (r > 0) \\ 0, & (r < 0) \end{cases} \quad (6.20)$$

と置けば満たされて、しかも $r > 0.5$ では流束制限を無くし、Lax-Wendroff 法の流束そのものに ($\phi(r) = 1$) なっている。

このようにして、テスト問題の 1 番目を解いたのが次に示す図である。好ましくない振動はすっかり消えているのが見てとれる。



もちろん、CFL 数が 1 の場合は、数値粘性により減衰しない解が得られる。この場合、流束制限関数が悪さをしていることはない。



前章で、線形 Godunov 法を解析した折、風上差分は中心差分にある種の人工粘性を追加したものだと説明した。Lax-Wendroff 法に対する TVD の付加項は、これと同じように説明することもできる。

6.1.2 負の特性速度を持つ定数係数スカラー方程式の場合

さて、今度は負の速度を持つ、定数係数のスカラー方程式、

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad (c < 0) \quad (6.21)$$

を考える。ここで、CFL 数は

$$\nu = c \frac{\Delta t}{\Delta x} < 0, \quad (6.22)$$

となる。正の速度の場合と同じようにして、

$$u_j^{n+1} = u_j^n + \nu \left\{ -1 + \frac{1}{2} (\nu + 1) \left[\phi(r_{j+1}^-) - \frac{\phi(r_j^-)}{r_j^-} \right] \right\} \Delta_{j+1/2} u^n, \quad (6.23)$$

としてしまう。ここで、

$$r_j^- \equiv \frac{\Delta_{j+1/2} u^n}{\Delta_{j-1/2} u^n}, \quad (6.24)$$

である。この場合も、 $\phi(r) = 1$ ならば、Lax-Wendroff 法になるし、 $\phi(r) = r$ ならば、Warming-Beam 法になるのも同じである。さて、これを式 (6.3) と式 (6.4) に代入すると、

$$C_{j-1/2}^+ = 0, \quad (6.25)$$

$$D_{j+1/2}^- = \nu \left\{ -1 + \frac{1}{2} (1 + \nu) \left[\phi(r_{j+1}^-) - \frac{\phi(r_j^-)}{r_j^-} \right] \right\}, \quad (6.26)$$

となり、条件 (6.13) と条件 (6.14) が TVD の十分条件になる。したがって、

$$u_j^{n+1} = u_j^n + \left(\nu \left\{ -1 + \frac{1}{2} (1 + \nu) \left[1 - \frac{1}{r_j^-} \right] \right\} \right)$$

$$+ \left\{ K_{j+1/2}^-(r_{j+1}^-) - \frac{K_{j-1/2}^-(r_j^-)}{r_j^-} \right\} \Delta_{j+1/2} u^n, \quad (6.27)$$

という修正項を付け加えるとすると、式 (6.23) と比較することで、結局、

$$K_{j+1/2}^- = \frac{\nu}{2} (1 + \nu) [\phi(r_{j+1}^-) - 1], \quad (6.28)$$

を得る。特性速度を a として、特性速度が正の場合と負の場合を一緒に表現すれば、

$$\begin{aligned} u_j^{n+1} &= u_j^n - \frac{1}{2}\nu(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) + \frac{1}{2}\nu^2(u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n) \\ &+ \left\{ K_{j+1/2}^+(r_j^+) + K_{j+1/2}^-(r_{j+1}^-) \right\} \Delta_{j+1/2} u^n \\ &- \left\{ K_{j-1/2}^+(r_{j-1}^+) + K_{j-1/2}^-(r_j^-) \right\} \Delta_{j-1/2} u^n, \end{aligned} \quad (6.29)$$

となり、

$$\begin{aligned} K_{j+1/2}^+ &= \begin{cases} \frac{\nu}{2}(1 - \nu) [1 - \phi(r_j^+)], & (a > 0) \\ 0, & (a \leq 0) \end{cases} \\ K_{j+1/2}^- &= \begin{cases} 0, & (a \geq 0) \\ \frac{\nu}{2}(1 + \nu) [\phi(r_{j+1}^-) - 1], & (a < 0) \end{cases} \end{aligned} \quad (6.30)$$

である。しかし、この表現だと特性速度の正負を判定して、そのたびに付加項を計算することになって煩わしい。したがって、 $K_{j+1/2}^\pm$ を再定義して、

$$K_{j+1/2}^+ = \frac{|\nu|}{2} (1 - |\nu|) [1 - \phi(r_j^+)], \quad (6.31)$$

$$K_{j+1/2}^- = \frac{|\nu|}{2} (1 - |\nu|) [1 - \phi(r_{j+1}^-)], \quad (6.32)$$

と置くことにする。実は、流束制限関数 (6.20) の元では、上式のどちらをとっても、TVD であることは Davis (1984) によって証明されている。

6.1.3 非線形スカラー方程式の場合

これらを、非線形のスカラー方程式、

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad (6.33)$$

に応用することは簡単である。ここで、特性速度は

$$a \equiv \frac{\partial f}{\partial u}, \quad (6.34)$$

で与えられる。数値的な特性速度を

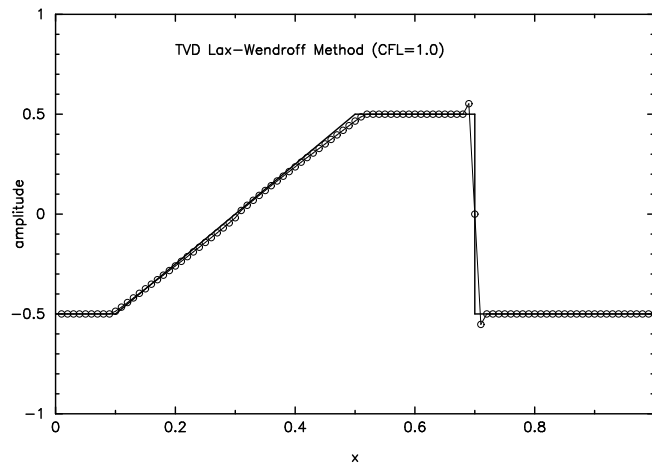
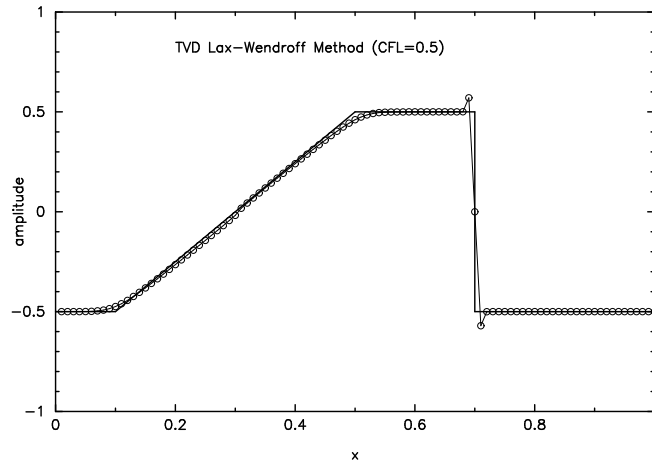
$$a_{j+1/2} = \frac{\Delta_{j+1/2} f}{\Delta_{j+1/2} u}, \quad (\Delta_{j+1/2} u \neq 0) \quad (6.35)$$

$$a_{j+1/2} = \left(\frac{\partial f}{\partial u} \right)_j, \quad (\Delta_{j+1/2} u = 0) \quad (6.36)$$

で定義すると、差分スキームを保存型に保つことができる。CFL 数を

$$\nu_{j+1/2} = a_{j+1/2} \frac{\Delta t}{\Delta x}, \quad (6.37)$$

で計算すると、今までの定数係数スカラー方程式についての考えがそのまま使えて、実際にテスト問題の2番目を解いてみたのが次の図である。



共に、Lax-Wendroff 法に特徴的に見られた衝撃波前後の数値振動が収まっているのが見てとれる。

6.1.4 線形多成分系双曲型方程式の場合

線形多成分系の波動方程式は、

$$\frac{\partial U}{\partial t} + A \frac{\partial U}{\partial x} = 0, \quad (6.38)$$

とおける。ここで、 A は定数行列である。この場合、変換行列 T を用いて、 A を対角化すれば、

$$\frac{\partial T^{-1}U}{\partial t} + T^{-1}AT \frac{\partial T^{-1}U}{\partial x} = 0, \quad (6.39)$$

となり、

$$\Lambda \equiv \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_K \end{pmatrix} = T^{-1}AT, \quad (6.40)$$

とおけば、対角化した各々の成分に対して、

$$\frac{\partial u_k}{\partial t} + \lambda_k \frac{\partial u_k}{\partial x} = 0, \quad (6.41)$$

となる。ここで、 λ_k ($k = 1, \dots, K$) は A の固有値である。これに対して、スカラー方程式の場合と同じように、付加項を付け加えると、

$$\begin{aligned} u_{k,j}^{n+1} &= u_{k,j}^n - \frac{1}{2}\nu_k (u_{k,j+1}^n - u_{k,j-1}^n) + \frac{1}{2}\nu_k^2 (u_{k,j+1}^n - 2u_{k,j}^n + u_{k,j-1}^n) \\ &+ \left\{ K_{k,j+1/2}^+(r_{k,j}^+) + K_{k,j+1/2}^-(r_{k,j+1}^-) \right\} \Delta_{j+1/2} u_k^n \\ &- \left\{ K_{k,j-1/2}^+(r_{k,j-1}^+) + K_{k,j-1/2}^-(r_{k,j}^-) \right\} \Delta_{j-1/2} u_k^n, \end{aligned} \quad (6.42)$$

となり、左から変換行列 T を掛けて元に戻すと、

$$\begin{aligned} U_j^{n+1} &= U_j^n - \frac{1}{2}A \frac{\Delta t}{\Delta x} (U_{j+1}^n - U_{j-1}^n) + \frac{1}{2}A^2 \left(\frac{\Delta t}{\Delta x} \right)^2 (U_{j+1}^n - 2U_j^n + U_{j-1}^n) \\ &+ \left\{ TK_{j+1/2}^+ T^{-1} + TK_{j+1/2}^- T^{-1} \right\} \Delta_{j+1/2} U^n \\ &- \left\{ TK_{j-1/2}^+ T^{-1} + TK_{j-1/2}^- T^{-1} \right\} \Delta_{j-1/2} U^n, \end{aligned} \quad (6.43)$$

となる。ここで、

$$TK^\pm(r^\pm)T^{-1} = T \begin{pmatrix} K_1^\pm(r_1^\pm) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & K_2^\pm(r_2^\pm) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & K_K^\pm(r_K^\pm) \end{pmatrix} T^{-1}, \quad (6.44)$$

である。

変換行列 T および、 T^{-1} を計算せずに、近似的に求めてしまう方法として、

$$\begin{aligned} &T \begin{pmatrix} K_1^\pm(r_1^\pm) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & K_2^\pm(r_2^\pm) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & K_K^\pm(r_K^\pm) \end{pmatrix} T^{-1} \\ &\approx \bar{K}^\pm(r^\pm) \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (6.45)$$

という近似式が Davis (1984) によって提案された。ここで、CFL 数 ν を

$$\nu \equiv \max(\lambda_k) \frac{\Delta t}{\Delta x}, \quad (6.46)$$

と定義し、

$$\bar{K}_{j+1/2}^+ = \frac{1}{2} C(\nu) [1 - \phi(r_j^+)], \quad (6.47)$$

$$\bar{K}_{j+1/2}^- = \frac{1}{2} C(\nu) [1 - \phi(r_{j+1}^-)], \quad (6.48)$$

として、

$$C(\nu) = \begin{cases} \nu(1 - \nu), & (0 < \nu < 0.5) \\ 0.25, & (0.5 < \nu < 1.0) \end{cases} \quad (6.49)$$

とする。ここで、CFL 数が 0.5 より大きい場合には、 $\nu(1 - \nu)$ の上限である、0.25 を採用することにする。この理由は最大の ν を与える固有値 λ_k に対して、残りの λ_l に対しては、CFL 数が必ず ν よりも小さくなるので、 ν が 0.5 よりも大きい場合は、可能性として最大 0.25 を与えることがあるからである。また、

$$r_j^+ = \frac{(\Delta U_{j-1/2}, \Delta U_{j+1/2})}{(\Delta U_{j+1/2}, \Delta U_{j+1/2})}, \quad (6.50)$$

$$r_{j+1}^- = \frac{(\Delta U_{j+1/2}, \Delta U_{j+3/2})}{(\Delta U_{j+1/2}, \Delta U_{j+1/2})}, \quad (6.51)$$

として、計算すると結構良好な結果が得られることを Davis (1984) は確認した。上の式の中で、 (\cdot, \cdot) は内積 (inner product) を表す。

第7章 Godunov スキーム

非線形 Godunov 法を流体の運動を記述するオイラー方程式に適用する方法を示す。格子点 j と $j+1$ に付随する物理量を U_j と U_{j+1} とで表すと、一般にふたつの量の間には物理量の跳びがある。このふたつの物理量が

$$x_{j+1/2} \equiv \frac{x_j + x_{j+1}}{2}, \quad (7.1)$$

で接しているとして、その後の物理量の時間変化を求める問題は、Riemann 問題と呼ばれる。この Riemann 問題を解くことにより、 $x_{j+1/2}$ における数値流束 $\bar{E}_{j+1/2}$ を求めることができる。このようにして、求めた数値流束を使うと、

$$\begin{aligned} U_j^{n+1} &= U_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} [\bar{E}(U_j^n, U_{j+1}^n) - \bar{E}(U_{j-1}^n, U_j^n)] \\ &= U_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \bar{E}_{j+1/2}^n + \frac{\Delta t}{\Delta x} \bar{E}_{j-1/2}^n, \end{aligned} \quad (7.2)$$

より、流体の時間発展を追いかけることができる。リーマン問題を厳密に解いて、その結果を使って数値流束を計算する方法を **Godunov 法** と呼ぶ。

7.1 リーマン問題

U_j と U_{j+1} を初期値とするリーマン問題は、時間相似解を持つ。その時間相似解のうち、時間軸上にくる特性線上の解が数値流束 $\bar{E}_{j+1/2}$ を与える。 U_j と U_{j+1} の状態によって、時間相似解は $(j, j+1)$ の間で、衝撃波または膨張波、接触不連続面、そして衝撃波または膨張波のというような3つの波が順番に存在する。これらの3つの波をはさんで、

$$\begin{aligned} \tilde{U}_j &= \begin{pmatrix} \rho_j \\ u_j \\ p_j \end{pmatrix}, \tilde{U}_{j+1/3} = \begin{pmatrix} \rho_{j+1/3} \\ u_{j+1/3} \\ p_{j+1/3} \end{pmatrix}, \\ \tilde{U}_{j+2/3} &= \begin{pmatrix} \rho_{j+2/3} \\ u_{j+2/3} \\ p_{j+2/3} \end{pmatrix}, \tilde{U}_{j+1} = \begin{pmatrix} \rho_{j+1} \\ u_{j+1} \\ p_{j+1} \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (7.3)$$

と4つの状態が存在する。このうち、接触不連続面をはさんで、圧力と速度は一定であるから、

$$u_{j+1/3} = u_{j+2/3} = u^*, \quad (7.4)$$

$$p_{j+1/3} = p_{j+2/3} = p^*, \quad (7.5)$$

となる。しかし、ここでは真空状態も取り扱えるようにするので、上記の状態だけではすべてを記述できない。

7.2 真空-真空の場合

左右とも真空の場合、当然ながら U_j と U_{j+1} には含まれた領域も真空になるので、物理量はすべてゼロとおける。これらより、数値流束は単純に、

$$\bar{E}_{j+1/2} = 0, \quad (7.6)$$

となる。

7.3 膨張波-真空の場合

右側が真空の場合、左側から右側へ膨張波が走る。しかし、

$$\varphi_j \equiv u_j - c_j > 0, \quad (7.7)$$

の場合は、正の方向への超音速流となり、時間軸上の値は、 U_j になるので、計算するまでもなく

$$\bar{E}_{j+1/2} = E(U_j), \quad (7.8)$$

となる。

次に、

$$\varphi_j \equiv u_j - c_j < 0, \quad (7.9)$$

の場合は、まず、膨張波の右側の端を求める必要がある。 $\lambda = u - c$ に対しては、

$$\frac{p}{\rho^\gamma} = \text{constant}, \quad (7.10)$$

$$u + \frac{2c}{\gamma - 1} = \text{constant}, \quad (7.11)$$

が膨張波を横切って保存されるリーマン不変量となるので、膨張波の領域に対しては、

$$\frac{p_j}{\rho_j^\gamma} = \frac{p}{\rho^\gamma}, \quad (7.12)$$

$$u_j + \frac{2c_j}{\gamma - 1} = u + \frac{2c}{\gamma - 1}, \quad (7.13)$$

が成り立つ。

$$\varphi \equiv u - c > u_j - c_j, \quad (7.14)$$

でパラメータ表示すると、リーマン不変量の関係式 (7.13) に代入して、

$$c = \left(u_j + \frac{2c_j}{\gamma - 1} - \varphi \right) \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1}, \quad (7.15)$$

を得る。ここで、膨張波の右の端の物理量を $U_{j+1/3}$ と表すと、 $c_{j+1/3} = 0$ の条件を使って、

$$\varphi_{j+1/3} = u_j + \frac{2c_j}{\gamma - 1}, \quad (7.16)$$

となる。さらに、これから速度、

$$u_{j+1/3} = \varphi_{j+1/3} + c_{j+1/3} = u_j + \frac{2c_j}{\gamma - 1}, \quad (7.17)$$

を得る。つまり、膨張波の右端の速度が求まった。

ここで、膨張波の右端の速度が負の場合、つまり、

$$\varphi_{j+1/3} = u_j + \frac{2c_j}{\gamma - 1} < 0, \quad (7.18)$$

の時は、時間軸上の物理量は真空となるので、数値流束は、

$$\bar{E}_{j+1/2} = 0, \quad (7.19)$$

となる。膨張波の右端の速度が正の場合、

$$u_j + \frac{2c_j}{\gamma - 1} > 0, \quad (7.20)$$

の時には、

$$\varphi_j = u_j - c_j < 0 < u_{j+1/3} - c_{j+1/3} = \varphi_{j+1/3}, \quad (7.21)$$

となり、 $\varphi = u - c = 0$ の特性線がこの膨張波の領域にあるので、 $\varphi = 0$ の時の値を $U_{j+1/6}$ とおけば、

$$\begin{aligned} 0 &= \varphi_{j+1/6} = u_{j+1/6} - c_{j+1/6} \\ &= u_{j+1/6} - \left(u_j + \frac{2c_j}{\gamma - 1} - \varphi_{j+1/6} \right) \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1}, \end{aligned} \quad (7.22)$$

より、

$$u_{j+1/6} = c_{j+1/6} = \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \left(u_j + \frac{2c_j}{\gamma - 1} \right), \quad (7.23)$$

が求まる。さらに、圧力と密度が、

$$p_{j+1/6} = p_j \left(\frac{c_{j+1/6}}{c_j} \right)^{\frac{2\gamma}{\gamma - 1}}, \quad (7.24)$$

$$\rho_{j+1/6} = \rho_j \left(\frac{p_{j+1/6}}{p_j} \right)^{\frac{1}{\gamma}}, \quad (7.25)$$

と求まる。これらの値より、数値流束は、

$$\bar{E}_{j+1/2} = E(U_{j+1/6}), \quad (7.26)$$

より計算できる。

7.4 真空-膨張波の場合

左側が真空の場合、右側から左側へ膨張波が走る。しかし、

$$\varphi_{j+1} \equiv u_{j+1} + c_{j+1} < 0, \quad (7.27)$$

の場合は、負の方向への超音速流となり、時間軸上の値は、 U_{j+1} になるので、計算するまでもなく

$$\bar{E}_{j+1/2} = E(U_{j+1}), \quad (7.28)$$

となる。

次に、

$$\varphi_{j+1} \equiv u_{j+1} + c_{j+1} > 0, \quad (7.29)$$

の場合は、まず、膨張波の左側の端を求める必要がある。特性速度 $\lambda = u + c$ に対しては、

$$\frac{p}{\rho^\gamma} = \text{constant}, \quad (7.30)$$

$$u - \frac{2c}{\gamma - 1} = \text{constant}, \quad (7.31)$$

がリーマン不変量になるので、

$$\frac{p_{j+1}}{\rho_{j+1}^\gamma} = \frac{p}{\rho^\gamma}, \quad (7.32)$$

$$u_{j+1} - \frac{2c_{j+1}}{\gamma - 1} = u - \frac{2c}{\gamma - 1}, \quad (7.33)$$

という関係式を満たす。

$$\varphi \equiv u + c, \quad (7.34)$$

を式 (7.33) に代入して、変形し、

$$c = - \left(u_{j+1} - \frac{2c_{j+1}}{\gamma - 1} - \varphi \right) \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1}, \quad (7.35)$$

となる。ここで、膨張波の左端の密度、圧力はゼロとなるから、その状態を $U_{j+2/3}$ で表すと、 $c_{j+2/3} = 0$ の条件を使って、

$$\varphi_{j+2/3} = u_{j+1} - \frac{2c_{j+1}}{\gamma - 1}, \quad (7.36)$$

となる。さらに、これから速度、

$$u_{j+2/3} = \varphi_{j+2/3} - c_{j+2/3} = u_{j+1} - \frac{2c_{j+1}}{\gamma - 1}, \quad (7.37)$$

を得る。つまり、膨張波の左端の速度が計算できた。

ここで、膨張波の左端の速度が正の場合、

$$0 < \varphi_{j+2/3} = u_{j+1} - \frac{2c_{j+1}}{\gamma - 1} < u_{j+1} + c_{j+1} = \varphi_{j+1}, \quad (7.38)$$

の時は、時間軸上の物理量は真空のそれになるので、すべてゼロになる。したがって、 $x_{j+1/2}$ での数値流束は

$$\bar{E}_{j+1/2} = 0, \quad (7.39)$$

となる。しかし、左端の速度が負の場合、

$$\varphi_{j+2/3} = u_{j+1} - \frac{2c_{j+1}}{\gamma-1} < 0 < u_{j+1} + c_{j+1} = \varphi_{j+1}, \quad (7.40)$$

の時には、 $\varphi = u + c = 0$ の特性線がこの膨張波の領域にあるので、 $\varphi = 0$ の時の U の値を $U_{j+5/6}$ とおけば、

$$\begin{aligned} 0 &= \varphi_{j+5/6} = u_{j+5/6} + c_{j+5/6} \\ &= u_{j+5/6} - \left(u_{j+1} - \frac{2c_{j+1}}{\gamma-1} - \varphi_{j+5/6} \right) \frac{\gamma-1}{\gamma+1}, \end{aligned} \quad (7.41)$$

より、

$$u_{j+5/6} = -c_{j+5/6} = \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \left(u_{j+1} - \frac{2c_{j+1}}{\gamma-1} \right), \quad (7.42)$$

が求まる。さらに、圧力と密度が、

$$p_{j+5/6} = p_{j+1} \left(\frac{c_{j+5/6}}{c_{j+1}} \right)^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}}, \quad (7.43)$$

$$\rho_{j+5/6} = \rho_{j+1} \left(\frac{p_{j+5/6}}{p_{j+1}} \right)^{\frac{1}{\gamma}}, \quad (7.44)$$

と求まる。これらの値より、数値流束は、

$$\bar{E}_{j+1/2} = E(U_{j+5/6}), \quad (7.45)$$

として計算できる。

7.5 正方向超音速流の場合 ($M_j > 1$, $M_{j+1} > 1$)

リーマン問題の解として、衝撃波ができるのか、それとも膨張波になるのかは、 U_j と U_{j+1} の状態で決まる特性速度の大小関係から簡単に判別できる。

$$0 < u_j - c_j < u_{j+1} - c_{j+1}, \quad (7.46)$$

の場合は、左側の特性速度の方が、右側の特性速度より小さいので、3つの波のうち、左側にできる波は膨張波となる。逆に、

$$u_j - c_j > u_{j+1} - c_{j+1} > 0, \quad (7.47)$$

の場合は、左側の特性速度の方が、右側の特性速度より大きいので、波の追い越しが起こり衝撃波が形成される。しかし、共に x の正の方向へ向かっての流れが超音速になっているので、 U_j の状態が $x = x_{j+1/2}$ を横切って、 x の正の方向へ伝播する。したがって、この場所での数値流束はどちらの場合でも、

$$\bar{E}_{j+1/2} = E(U_j), \quad (7.48)$$

となる。

7.6 負方向超音速流の場合 ($M_j < -1$, $M_{j+1} < -1$)

$$u_j + c_j < u_{j+1} + c_{j+1} < 0, \quad (7.49)$$

の場合は、左側の特性速度の方が、右側の特性速度より小さいので、3つの波のうち、右側にできる波は膨張波となる。逆に、

$$0 > u_j + c_j > u_{j+1} + c_{j+1}, \quad (7.50)$$

の場合は、右側の特性速度の方が、右側の特性速度より大きいので、波の追い越しが起こり衝撃波が形成される。しかし、共に x の負の方向へ向かっての流れが超音速になっているので、 U_{j+1} の状態が $x = x_{j+1/2}$ を横切って、 x の負の方向へ伝播する。したがって、この場所での数値流束は共に、

$$\bar{E}_{j+1/2} = E(U_{j+1}), \quad (7.51)$$

となる。

7.7 膨張波-不連続面-膨張波の場合

$$u_j - c_j < u_{j+1} - c_{j+1}, \quad (7.52)$$

の場合は、左側の特性速度の方が、右側の特性速度より小さいので、3つの波のうち、左側にできる波は膨張波となる。さらに、

$$u_j + c_j < u_{j+1} + c_{j+1}, \quad (7.53)$$

の場合は、左側の特性速度の方が、右側の特性速度より小さいので、3つの波のうち、右側にできる波は膨張波となる。このふたつの条件が共に満たされた時、 $(j, j+1)$ で、 x の正の方へ向かって、膨張波、接触不連続面、膨張波の順に並ぶ。一定状態へ向かう膨張波は単純波となるので、 $\lambda = u - c$ に対しては、

$$\frac{p}{\rho^\gamma} = \text{constant}, \quad (7.54)$$

$$u + \frac{2c}{\gamma - 1} = \text{constant}, \quad (7.55)$$

が膨張波を横切って保存されるリーマン不変量となる。したがって、

$$\frac{p_j}{\rho_j^\gamma} = \frac{p^*}{\rho_{j+1/3}^\gamma}, \quad (7.56)$$

$$u_j + \frac{2c_j}{\gamma - 1} = u^* + \frac{2c_{j+1/3}}{\gamma - 1}, \quad (7.57)$$

という関係式を満たす。

$\lambda = u + c$ に対しては、

$$\frac{p}{\rho^\gamma} = \text{constant}, \quad (7.58)$$

$$u - \frac{2c}{\gamma - 1} = \text{constant}, \quad (7.59)$$

がリーマン不変量になるので、

$$\frac{p_{j+1}}{\rho_{j+1}^\gamma} = \frac{p^*}{\rho_{j+2/3}^\gamma}, \quad (7.60)$$

$$u_{j+1} - \frac{2c_{j+1}}{\gamma - 1} = u^* - \frac{2c_{j+2/3}}{\gamma - 1}, \quad (7.61)$$

という関係式を満たす。

この場合、未知数が u^* , p^* , $\rho_{j+1/3}$, $\rho_{j+2/3}$ の4つで、解くべき式が4本あるので、解ける。式(7.57)、および、(7.61)の辺々引き算して u^* を消去すると、

$$u_{j+1} - u_j - \frac{2}{\gamma - 1} (c_{j+1} + c_j) = -\frac{2}{\gamma - 1} (c_{j+2/3} + c_{j+1/3}), \quad (7.62)$$

となる。式(7.56)を変形して、

$$c_{j+1/3} = c_j \left(\frac{p^*}{p_j} \right)^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}}, \quad (7.63)$$

式(7.60)を変形して、

$$c_{j+2/3} = c_{j+1} \left(\frac{p^*}{p_{j+1}} \right)^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}}, \quad (7.64)$$

となる。これを代入して、 p^* について解くと、

$$p^* = p_{j+1} \left\{ \frac{c_{j+1} + c_j - \frac{\gamma-1}{2} (u_{j+1} - u_j)}{c_{j+1} + c_j \left(\frac{p_{j+1}}{p_j} \right)^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}}} \right\}^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}}, \quad (7.65)$$

あるいは、

$$p^* = p_j \left\{ \frac{c_{j+1} + c_j - \frac{\gamma-1}{2} (u_{j+1} - u_j)}{c_{j+1} \left(\frac{p_j}{p_{j+1}} \right)^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}} + c_j} \right\}^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}}, \quad (7.66)$$

となる。

7.7.1 真空のある解

ここで、注意しなければならないのは、

$$c_{j+1} + c_j - \frac{\gamma-1}{2} (u_{j+1} - u_j) < 0, \quad (7.67)$$

の場合、圧力 p^* が負になってしまうということである。この場合は、

$$p^* = 0, \quad \rho_{j+1/3} = 0, \quad \rho_{j+2/3} = 0, \quad (7.68)$$

あるいは、

$$p^* = 0, \quad c_{j+1/3} = 0, \quad c_{j+2/3} = 0, \quad (7.69)$$

が解になる。したがって、 x 軸の正の方向へ向かって、**膨張波の先端-膨張波の後端-真空-膨張波の後端-膨張波の先端**という順序で並ぶ。特性速度の大きさでは、

$$u_j - c_j < u_{j+1/3} - c_{j+1/3} < u_{j+2/3} + c_{j+2/3} < u_{j+1} + c_{j+1}, \quad (7.70)$$

となる。ここで、 $U_{j+1/3}$ は左側の膨張波の後端を表し、 $U_{j+2/3}$ は右側の膨張波の後端を表す。二つの膨張波のうち左側の膨張波は、

$$\varphi = u - c > u_j - c_j, \quad (7.71)$$

でパラメータ表示でき、かつ、

$$c = c_j \left(\frac{p}{p_j} \right)^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}}, \quad (7.72)$$

を使えば、リーマン不変量の関係式

$$u_j + \frac{2c_j}{\gamma-1} = u + \frac{2c}{\gamma-1}, \quad (7.73)$$

に代入して、

$$c = \left(u_j + \frac{2c_j}{\gamma-1} - \varphi \right) \frac{\gamma-1}{\gamma+1}, \quad (7.74)$$

を得る。ここで、 $c_{j+1/3} = 0$ の条件を使って、

$$\varphi_{j+1/3} = u_j + \frac{2c_j}{\gamma-1}, \quad (7.75)$$

となる。さらに、これから速度、

$$u_{j+1/3} = \varphi_{j+1/3} + c_{j+1/3} = u_j + \frac{2c_j}{\gamma-1}, \quad (7.76)$$

を得る。つまり、左側の膨張波の後端の速度が計算できたことになる。

ここで、左側の膨張波の後端の速度が負の場合、

$$u_j + \frac{2c_j}{\gamma-1} < 0, \quad (7.77)$$

の時は、右側の膨張波の性質を求めた後でないと $x_{j+1/2}$ での流束を評価することは、できない。しかし、後端の速度が正の場合、

$$u_j + \frac{2c_j}{\gamma-1} > 0, \quad (7.78)$$

の時には、

$$u_j - c_j < 0 < u_{j+1/3} - c_{j+1/3} < u_{j+2/3} + c_{j+2/3} < u_{j+1} + c_{j+1}, \quad (7.79)$$

となり、 $\varphi = u - c = 0$ の特性線がこの膨張波の領域にあるので、 $\varphi = 0$ の時の値を $U_{j+1/6}$ とおけば、

$$\begin{aligned} 0 &= \varphi_{j+1/6} = u_{j+1/6} - c_{j+1/6} \\ &= u_{j+1/6} - \left(u_j + \frac{2c_j}{\gamma - 1} - \varphi_{j+1/6} \right) \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1}, \end{aligned} \quad (7.80)$$

より、

$$u_{j+1/6} = c_{j+1/6} = \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \left(u_j + \frac{2c_j}{\gamma - 1} \right), \quad (7.81)$$

が求まる。さらに、圧力と密度が、

$$p_{j+1/6} = p_j \left(\frac{c_{j+1/6}}{c_j} \right)^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}}, \quad (7.82)$$

$$\rho_{j+1/6} = \rho_j \left(\frac{p_{j+1/6}}{p_j} \right)^{\frac{1}{\gamma}}, \quad (7.83)$$

と求まる。これらの値より、数値流束は、

$$\bar{E}_{j+1/2} = E(U_{j+1/6}), \quad (7.84)$$

より計算できる。

今度は、右側の膨張波について求めてみる。

$$\varphi = u + c < u_{j+1} + c_{j+1}, \quad (7.85)$$

でパラメータ表示でき、かつ、

$$c = c_{j+1} \left(\frac{p}{p_{j+1}} \right)^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}}, \quad (7.86)$$

を使えば、リーマン不変量の関係式

$$u_{j+1} - \frac{2c_{j+1}}{\gamma - 1} = u - \frac{2c}{\gamma - 1}, \quad (7.87)$$

に代入して、

$$c = - \left(u_{j+1} - \frac{2c_{j+1}}{\gamma - 1} - \varphi \right) \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1}, \quad (7.88)$$

を得る。ここで、 $c_{j+2/3} = 0$ の条件を使って、

$$\varphi_{j+2/3} = u_{j+1} - \frac{2c_{j+1}}{\gamma - 1}, \quad (7.89)$$

となる。さらに、これから速度、

$$u_{j+2/3} = \varphi_{j+2/3} - c_{j+2/3} = u_{j+1} - \frac{2c_{j+1}}{\gamma-1}, \quad (7.90)$$

を得る。つまり、右側の膨張波の後端の速度が計算できたことになる。

ここで、右側の膨張波の後端の速度が正の場合、

$$u_{j+1} - \frac{2c_{j+1}}{\gamma-1} > 0, \quad (7.91)$$

の時は、左側の膨張波との関係を調べないと $x_{j+1/2}$ での流束を評価することは、できない。しかし、後端の速度が負の場合、

$$u_{j+1} - \frac{2c_{j+1}}{\gamma-1} < 0, \quad (7.92)$$

の時には、

$$u_j - c_j < u_{j+1/3} - c_{j+1/3} < u_{j+2/3} + c_{j+2/3} < 0 < u_{j+1} + c_{j+1}, \quad (7.93)$$

となり、 $\varphi = u + c = 0$ の特性線がこの膨張波の領域にあるので、 $\varphi = 0$ の時の U の値を $U_{j+5/6}$ とおけば、

$$\begin{aligned} 0 &= \varphi_{j+5/6} = u_{j+5/6} + c_{j+5/6} \\ &= u_{j+5/6} - \left(u_{j+1} - \frac{2c_{j+1}}{\gamma-1} - \varphi_{j+5/6} \right) \frac{\gamma-1}{\gamma+1}, \end{aligned} \quad (7.94)$$

より、

$$u_{j+5/6} = -c_{j+5/6} = \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \left(u_{j+1} - \frac{2c_{j+1}}{\gamma-1} \right), \quad (7.95)$$

が求まる。さらに、圧力と密度が、

$$p_{j+5/6} = p_{j+1} \left(\frac{c_{j+5/6}}{c_{j+1}} \right)^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}}, \quad (7.96)$$

$$\rho_{j+5/6} = \rho_{j+1} \left(\frac{p_{j+5/6}}{p_{j+1}} \right)^{\frac{1}{\gamma}}, \quad (7.97)$$

と求まる。これらの値より、数値流束は、

$$\bar{E}_{j+1/2} = E(U_{j+5/6}), \quad (7.98)$$

として計算できる。

次に、左側の膨張波の後端の速度が負、

$$u_{j+1/3} = u_j + \frac{2c_j}{\gamma-1} < 0, \quad (7.99)$$

かつ、右側の膨張波の後端の速度が正、

$$u_{j+2/3} = u_{j+1} - \frac{2c_{j+1}}{\gamma - 1} > 0, \quad (7.100)$$

が同時に満たされる場合は、

$$u_j - c_j < u_{j+1/3} - c_{j+1/3} < 0 < u_{j+2/3} + c_{j+2/3} < u_{j+1} + c_{j+1}, \quad (7.101)$$

となり、 $x_{j+1/2}$ の場所は真空になる。したがって、

$$\rho_{j+1/2} = 0, \quad u_{j+1/2} = 0, \quad p_{j+1/2} = 0, \quad (7.102)$$

が求める値であり、これらから数値流束 $\bar{E}_{j+1/2} = 0$ が計算できる。

7.7.2 真空のない解

もとに戻って、 p^* の値が正の値を持つ時は、 x 軸の正の方向へ向かって、**膨張波の先端-膨張波の後端-接触不連続面-膨張波の後端-膨張波の先端** という順序になる。これらの特性速度の関係は、

$$u_j - c_j < u^* - c_{j+1/3} < u^* < u^* + c_{j+2/3} < u_{j+1} + c_{j+1}, \quad (7.103)$$

で与えられる。左側の膨張波は、パラメータ

$$\varphi = u - c > u_j - c_j, \quad (7.104)$$

で表せる。また、 p^* より、 $c_{j+1/3}$, $c_{j+2/3}$, u^* は式を逆にたどれば、すぐ求まる。その時の膨張波の後端の値は、

$$\varphi_{j+1/3} = u^* - c_{j+1/3}, \quad (7.105)$$

であり、

$$u^* - c_{j+1/3} > 0, \quad (7.106)$$

なら、

$$u_j - c_j < 0 < u^* - c_{j+1/3} < u^* < u^* + c_{j+2/3} < u_{j+1} + c_{j+1}, \quad (7.107)$$

となり、時間軸は膨張波の領域に含まれるので、 $\varphi = u - c = 0$ の特性線がこれに対応する。 $\varphi = 0$ の時の U の値を $U_{j+1/6}$ とおけば、

$$\begin{aligned} 0 &= \varphi_{j+1/6} = u_{j+1/6} - c_{j+1/6} \\ &= u_{j+1/6} - \left(u_j + \frac{2c_j}{\gamma - 1} - \varphi_{j+1/6} \right) \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1}, \end{aligned} \quad (7.108)$$

より、

$$u_{j+1/6} = c_{j+1/6} = \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \left(u_j + \frac{2c_j}{\gamma - 1} \right), \quad (7.109)$$

が求まる。さらに、圧力と密度が、

$$p_{j+1/6} = p_j \left(\frac{c_{j+1/6}}{c_j} \right)^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}}, \quad (7.110)$$

$$\rho_{j+1/6} = \rho_j \left(\frac{p_{j+1/6}}{p_j} \right)^{\frac{1}{\gamma}}, \quad (7.111)$$

と求まる。これらの値より、数値流束は

$$\bar{E}_{j+1/2} = E(U_{j+1/6}), \quad (7.112)$$

として計算できる。

もし、

$$u_j - c_j < u^* - c_{j+1/3} < 0 < u^* < u^* + c_{j+2/3} < u_{j+1} + c_{j+1}, \quad (7.113)$$

ならば、時間軸は左側の膨張波の後端と接触不連続面の間に挟まれるので、その状態は $U_{j+1/3}$ で与えられる。したがって、数値流束は

$$\bar{E}_{j+1/2} = E(U_{j+1/3}), \quad (7.114)$$

から計算される。

もし、

$$u_j - c_j < u^* - c_{j+1/3} < u^* < 0 < u^* + c_{j+2/3} < u_{j+1} + c_{j+1}, \quad (7.115)$$

ならば、時間軸は接触不連続面と右側の膨張波の後端の間に挟まれるので、その状態は $U_{j+2/3}$ で与えられる。したがって、数値流束は

$$\bar{E}_{j+1/2} = E(U_{j+2/3}), \quad (7.116)$$

から計算される。

もし、

$$u_j - c_j < u^* - c_{j+1/3} < u^* < u^* + c_{j+2/3} < 0 < u_{j+1} + c_{j+1}, \quad (7.117)$$

ならば、今度は、右側の膨張波の領域に $\varphi = u + c = 0$ の特性線がくるので、 $\varphi = 0$ の時の U の値を $U_{j+5/6}$ とおけば、

$$\begin{aligned} 0 &= \varphi_{j+5/6} = u_{j+5/6} + c_{j+5/6} \\ &= u_{j+5/6} - \left(u_{j+1} - \frac{2c_{j+1}}{\gamma-1} - \varphi_{j+5/6} \right) \frac{\gamma-1}{\gamma+1}, \end{aligned} \quad (7.118)$$

より、

$$u_{j+5/6} = -c_{j+5/6} = \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \left(u_{j+1} - \frac{2c_{j+1}}{\gamma-1} \right), \quad (7.119)$$

が求まる。さらに、圧力と密度が、

$$p_{j+5/6} = p_{j+1} \left(\frac{c_{j+5/6}}{c_{j+1}} \right)^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}}, \quad (7.120)$$

$$\rho_{j+5/6} = \rho_{j+1} \left(\frac{p_{j+5/6}}{p_{j+1}} \right)^{\frac{1}{\gamma}}, \quad (7.121)$$

と求まる。これらの値より、数値流束は

$$\bar{E}_{j+1/2} = E(U_{j+5/6}), \quad (7.122)$$

として計算できることになる。

7.8 膨張波-不連続面-衝撃波の場合

$$u_j - c_j < u_{j+1} - c_{j+1}, \quad (7.123)$$

の場合は、左側の特性速度の方が、右側の特性速度より小さいので、3つの波のうち、左側にできる波は膨張波となる。さらに、

$$u_j + c_j > u_{j+1} + c_{j+1}, \quad (7.124)$$

の場合は、左側の特性速度の方が、右側の特性速度より大きいので、3つの波のうち、右側にできる波は衝撃波となる。このふたつの条件が共に満たされた時、 $(j, j+1)$ で、 x の正の方へ向かって、**膨張波-接触不連続面-衝撃波** の順に並ぶ。一定状態へ向かう膨張波は単純波となるので、特性速度 $\lambda = u - c$ に対しては、

$$\frac{p}{\rho^\gamma} = \text{constant}, \quad (7.125)$$

$$u + \frac{2c}{\gamma - 1} = \text{constant}, \quad (7.126)$$

が膨張波を横切って保存されるリーマン不変量となる。したがって、

$$\frac{p_j}{\rho_j^\gamma} = \frac{p^*}{\rho_{j+1/3}^\gamma}, \quad (7.127)$$

$$u_j + \frac{2c_j}{\gamma - 1} = u^* + \frac{2c_{j+1/3}}{\gamma - 1}, \quad (7.128)$$

という関係式を満たす。

右側にできる衝撃波については、衝撃波の速度を λ とすると、2章で求めた、衝撃波についての jump condition

$$\lambda[U] = [E], \quad (7.129)$$

から、

$$\lambda(\rho_{j+1} - \rho_{j+2/3}) = \rho_{j+1}u_{j+1} - \rho_{j+2/3}u^*, \quad (7.130)$$

$$\lambda(\rho_{j+1}u_{j+1} - \rho_{j+2/3}u^*) = \rho_{j+1}u_{j+1}^2 + p_{j+1} - \rho_{j+2/3}u^{*2} - p^*, \quad (7.131)$$

$$\lambda(e_{j+1} - e_{j+2/3}) = (e_{j+1} + p_{j+1})u_{j+1} - (e_{j+2/3} + p^*)u^*, \quad (7.132)$$

が成り立つ。未知数が p^* , u^* , $c_{j+1/3}$, $c_{j+2/3}$, λ の5つで、式が5個あるから、これらは解ける。リーマン不変量の式から、

$$\rho_{j+1/3} = \rho_j \left(\frac{p^*}{p_j} \right)^{\frac{1}{\gamma}}, \quad (7.133)$$

$$c_{j+1/3} = c_j \left(\frac{p^*}{p_j} \right)^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}}, \quad (7.134)$$

$$u^* = u_j + \frac{2c_j}{\gamma-1} \left\{ 1 - \left(\frac{p^*}{p_j} \right)^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}} \right\}, \quad (7.135)$$

となる。ここで、

$$m_{j+1/3} \equiv -\frac{p_j - p^*}{u_j - u^*}, \quad (7.136)$$

と定義すると、

$$m_{j+1/3} = \frac{\gamma-1}{2} \frac{p_j}{c_j} \frac{1 - (p^*/p_j)}{1 - (p^*/p_j)^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}}}, \quad (7.137)$$

となる。

次に、右側の衝撃波については、jump condition の最初の式 (7.130) から、

$$m_{j+2/3} \equiv \rho_{j+1} (u_{j+1} - \lambda) = \rho_{j+2/3} (u^* - \lambda), \quad (7.138)$$

として $m_{j+2/3}$ を定義しておく。Jump condition の2番目の式 (7.131) を変形して

$$\rho_{j+1} u_{j+1} (u_{j+1} - \lambda) + \rho_{j+2/3} u^* (\lambda - u^*) + p_{j+1} - p^* = 0, \quad (7.139)$$

となるから、

$$m_{j+2/3} (u_{j+1} - u^*) + p_{j+1} - p^* = 0, \quad (7.140)$$

となる。これより、

$$m_{j+2/3} = -\frac{p_{j+1} - p^*}{u_{j+1} - u^*}, \quad (7.141)$$

となり、左側にできる膨張波に関するものと同じ形式になっている。さて、jump condition の3番目の式 (7.132) を変形して

$$e_{j+1} (u_{j+1} - \lambda) + e_{j+2/3} (\lambda - u^*) + p_{j+1} u_{j+1} - p^* u^* = 0, \quad (7.142)$$

となるので、さらに変形して、

$$m_{j+2/3} \left(\frac{e_{j+1}}{\rho_{j+1}} - \frac{e_{j+2/3}}{\rho_{j+2/3}} \right) + p_{j+1} u_{j+1} - p^* u^* = 0, \quad (7.143)$$

となり、

$$m_{j+2/3} \left\{ \frac{1}{\gamma-1} \left(\frac{p_{j+1}}{\rho_{j+1}} - \frac{p^*}{\rho_{j+2/3}} \right) + \frac{1}{2} (u_{j+1}^2 - u^{*2}) \right\}$$

$$+ p_{j+1}u_{j+1} - p^*u^* = 0, \quad (7.144)$$

となる。ここで、式 (7.141) などを代入すると、

$$\begin{aligned} & \frac{m_{j+2/3} p_{j+1}}{\gamma - 1 \rho_{j+1}} \left(1 - \frac{p^* \rho_{j+1}}{p_{j+1} \rho_{j+2/3}} \right) - m_{j+2/3} \frac{u_{j+1} + u^*}{2} \frac{p_{j+1} - p^*}{m_{j+2/3}} \\ & + p_{j+1}u_{j+1} - p^*u^* = 0, \end{aligned} \quad (7.145)$$

となるので、さらに変形して、

$$\begin{aligned} & \frac{m_{j+2/3} p_{j+1}}{\gamma - 1 \rho_{j+1}} \left(1 - \frac{p^*}{p_{j+1}} \frac{u^* - \lambda}{u_{j+1} - \lambda} \right) \\ & + \frac{1}{2} (p_{j+1} + p^*) (u_{j+1} - u^*) = 0, \end{aligned} \quad (7.146)$$

となり、もう一度変形して、

$$\begin{aligned} & \frac{m_{j+2/3} p_{j+1}}{\gamma - 1 \rho_{j+1}} \left(1 - \frac{p^*}{p_{j+1}} \left(1 - \frac{u_{j+1} - u^*}{u_{j+1} - \lambda} \right) \right) \\ & - \frac{1}{2m_{j+2/3}} (p_{j+1}^2 - p^{*2}) = 0, \end{aligned} \quad (7.147)$$

となる。最後にもう一度、式 (7.138) などを代入すると、

$$\begin{aligned} & \frac{m_{j+2/3} p_{j+1}}{\gamma - 1 \rho_{j+1}} \left(1 - \frac{p^*}{p_{j+1}} \left(1 + \frac{\rho_{j+1} p_{j+1}}{m_{j+2/3}^2} \left(1 - \frac{p^*}{p_{j+1}} \right) \right) \right) \\ & - \frac{p_{j+1}^2}{2m_{j+2/3}} \left(1 - \left(\frac{p^*}{p_{j+1}} \right)^2 \right) = 0, \end{aligned} \quad (7.148)$$

を得る。ここで、 $m_{j+2/3}$ の2次式を解いて、マイナス符号をとって、

$$m_{j+2/3} = -\sqrt{\rho_{j+1} p_{j+1}} \left\{ \frac{\gamma - 1}{2} + \frac{\gamma + 1}{2} \left(\frac{p^*}{p_{j+1}} \right) \right\}^{1/2}, \quad (7.149)$$

を得る。

ここで、左側にできる膨張波と右側にできる衝撃波に関する式、

$$m_{j+1/3} (u_j - u^*) + p_j - p^* = 0, \quad (7.150)$$

$$m_{j+2/3} (u_{j+1} - u^*) + p_{j+1} - p^* = 0, \quad (7.151)$$

を得ることができた。この2式から u^* を消去すると、

$$p^* = \frac{u_{j+1} - u_j + \frac{p_{j+1}}{m_{j+2/3}} - \frac{p_j}{m_{j+1/3}}}{\frac{1}{m_{j+1/3}} - \frac{1}{m_{j+2/3}}}, \quad (7.152)$$

から、 p^* が求まる式になる。しかし、 $m_{j+1/3}$, $m_{j+2/3}$ には共に p^* が含まれているので、この方程式は超越方程式になる。ここでは、逐次近似法で解を求めることにする。まず、 p^* の初期値として、

$$p^* \leftarrow p^{(0)} = \frac{1}{2} (p_{j+1} + p_j), \quad (7.153)$$

を採用し、これを式 (7.137) および式 (7.149) に代入し、式 (7.152) より、 $p^{(1)}$ を計算する。この方法を収束するまで繰り返す。 n 回目の p^* の値を $p^{(n)}$ とすると、

$$p^{(n+1)} = \omega p^{(n)} + (1 - \omega) p^*, \quad (0 < \omega < 1) \quad (7.154)$$

などとして、 ω の値を調節すると良い。ここで、 p^* は式 (7.152) を直接解いて得た値である。また逐次近似の解が収束するとは、 ε を十分小さい値として、

$$\frac{|p^{(n+1)} - p^{(n)}|}{p^{(n)}} < \varepsilon, \quad (7.155)$$

が満足されることをいう。求まった、 p^* を使うと、他のすべての物理量、 u^* , $\rho_{j+1/3}$, $\rho_{j+2/3}$, λ が求まる。

さて、求まった衝撃波の速度が負の場合、すなわち膨張波の先端-膨張波の後端-接触不連続面-衝撃波の順にならんでいて、

$$u_j - c_j < u^* - c_{j+1/3} < u^* < \lambda < 0, \quad (7.156)$$

の場合は、時間軸上の状態は、 U_{j+1} で与えられるので、この点での数値流束は、

$$\bar{E}_{j+1/2} = E(U_{j+1}), \quad (7.157)$$

と計算される。次に、接触不連続面の速度は u^* で与えられるので、この速度が負の場合、すなわち

$$u_j - c_j < u^* - c_{j+1/3} < u^* < 0 < \lambda, \quad (7.158)$$

の場合は、 $x_{j+1/2}$ での状態は、 $U_{j+2/3}$ で与えられるので、この点での数値流束は、

$$\bar{E}_{j+1/2} = E(U_{j+2/3}), \quad (7.159)$$

と計算される。次に、膨張波の後端の速度は $u^* - c_{j+1/3}$ で与えられるので、この速度が負の場合、すなわち

$$u_j - c_j < u^* - c_{j+1/3} < 0 < u^* < \lambda, \quad (7.160)$$

の場合は、時間軸上 $x_{j+1/2}$ の状態は、 $U_{j+1/3}$ で与えられるので、 $x_{j+1/2}$ の点での数値流束は、

$$\bar{E}_{j+1/2} = E(U_{j+1/3}), \quad (7.161)$$

と計算される。最後に、膨張波の先端の速度は $u_j - c_j$ で与えられるので、この速度が負の場合、すなわち

$$u_j - c_j < 0 < u^* - c_{j+1/3} < u^* < \lambda, \quad (7.162)$$

なら、時間軸 $x_{j+1/2}$ は膨張波の領域に含まれるので、

$$\varphi = u - c > u_j - c_j, \quad (7.163)$$

でパラメータ表示した場合に、 $\varphi = u - c = 0$ の特性線がこれに対応する。 $\varphi = 0$ の時の U の値を $U_{j+1/6}$ とおけば、

$$0 = \varphi_{j+1/6} = u_{j+1/6} - c_{j+1/6}$$

$$= u_{j+1/6} - \left(u_j + \frac{2c_j}{\gamma-1} - \varphi_{j+1/6} \right) \frac{\gamma-1}{\gamma+1}, \quad (7.164)$$

より、

$$u_{j+1/6} = c_{j+1/6} = \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \left(u_j + \frac{2c_j}{\gamma-1} \right), \quad (7.165)$$

が求まる。さらに、圧力と密度が、

$$p_{j+1/6} = p_j \left(\frac{c_{j+1/6}}{c_j} \right)^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}}, \quad (7.166)$$

$$\rho_{j+1/6} = \rho_j \left(\frac{p_{j+1/6}}{p_j} \right)^{\frac{1}{\gamma}}, \quad (7.167)$$

と求まる。これらの値より、数値流束

$$\bar{E}_{j+1/2} = E(U_{j+1/6}), \quad (7.168)$$

として計算できる。

7.9 衝撃波-不連続面-膨張波の場合

$$u_j - c_j > u_{j+1} - c_{j+1}, \quad (7.169)$$

の場合は、左側の特性速度の方が、右側の特性速度より大きいので、3つの波のうち、左側にできる波は衝撃波となる。さらに、

$$u_j + c_j < u_{j+1} + c_{j+1}, \quad (7.170)$$

の場合は、左側の特性速度の方が、右側の特性速度より小さいので、3つの波のうち、右側にできる波は膨張波となる。このふたつの条件が共に満たされた時、 $(j, j+1)$ で、 x の正の方へ向かって、**衝撃波-接触不連続面-膨張波** の順に並ぶ。一定状態へ向かう膨張波は単純波となるので、右側にできる膨張波の特性速度 $\lambda = u + c$ に対しては、

$$\frac{p}{\rho^\gamma} = \text{constant}, \quad (7.171)$$

$$u - \frac{2c}{\gamma-1} = \text{constant}, \quad (7.172)$$

が膨張波を横切って保存されるリーマン不変量となる。したがって、

$$\frac{p_{j+1}}{\rho_{j+1}^\gamma} = \frac{p^*}{\rho_{j+2/3}^\gamma}, \quad (7.173)$$

$$u_{j+1} - \frac{2c_{j+1}}{\gamma-1} = u^* - \frac{2c_{j+2/3}}{\gamma-1}, \quad (7.174)$$

という関係式を満たす。

左側にできる衝撃波については、衝撃波の速度を λ とすると、2章で求めた、衝撃波についての jump condition

$$\lambda [U] = [E], \quad (7.175)$$

から、

$$\lambda (\rho_j - \rho_{j+1/3}) = \rho_j u_j - \rho_{j+1/3} u^*, \quad (7.176)$$

$$\lambda (\rho_j u_j - \rho_{j+1/3} u^*) = \rho_j u_j^2 + p_j - \rho_{j+1/3} u^{*2} - p^*, \quad (7.177)$$

$$\lambda (e_j - e_{j+1/3}) = (e_j + p_j) u_j - (e_{j+1/3} + p^*) u^*, \quad (7.178)$$

が成り立つ。未知数が p^* , u^* , $\rho_{j+1/3}$, $\rho_{j+2/3}$, λ の5つで、式が5個あるから、これらは前節の場合と同様にして解ける。リーマン不変量の式から、

$$\rho_{j+2/3} = \rho_{j+1} \left(\frac{p^*}{p_{j+1}} \right)^{\frac{1}{\gamma}}, \quad (7.179)$$

$$c_{j+2/3} = c_{j+1} \left(\frac{p^*}{p_{j+1}} \right)^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}}, \quad (7.180)$$

$$u^* = u_{j+1} - \frac{2c_{j+1}}{\gamma-1} \left\{ 1 - \left(\frac{p^*}{p_{j+1}} \right)^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}} \right\}, \quad (7.181)$$

となる。ここで、前節と同じように

$$m_{j+2/3} \equiv -\frac{p_{j+1} - p^*}{u_{j+1} - u^*}, \quad (7.182)$$

と定義すると、

$$m_{j+2/3} = -\frac{\gamma-1}{2} \frac{p_{j+1}}{c_{j+1}} \frac{1 - (p^*/p_{j+1})}{1 - (p^*/p_{j+1})^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}}}, \quad (7.183)$$

となる。

次に、左側の衝撃波については、jump condition の最初の式 (7.130) から、

$$m_{j+1/3} \equiv \rho_j (u_j - \lambda) = \rho_{j+1/3} (u^* - \lambda), \quad (7.184)$$

として $m_{j+1/3}$ を定義しておく。Jump condition の2番目の式 (7.177) を変形して

$$\rho_j u_j (u_j - \lambda) + \rho_{j+1/3} u^* (\lambda - u^*) + p_j - p^* = 0, \quad (7.185)$$

となるから、

$$m_{j+1/3} (u_j - u^*) + p_j - p^* = 0, \quad (7.186)$$

となる。これより、

$$m_{j+1/3} = -\frac{p_j - p^*}{u_j - u^*}, \quad (7.187)$$

となり、左側にできる膨張波に関するものと同じ形式になっている。さて、jump condition の3番目の式 (7.178) を変形して

$$e_j(u_j - \lambda) + e_{j+1/3}(\lambda - u^*) + p_j u_j - p^* u^* = 0, \quad (7.188)$$

となるので、前節と同様に変形して、今度はプラスの符号をとって、

$$m_{j+1/3} = \sqrt{\rho_j p_j} \left\{ \frac{\gamma - 1}{2} + \frac{\gamma + 1}{2} \left(\frac{p^*}{p_j} \right) \right\}^{1/2}, \quad (7.189)$$

を得る。

ここで、左側にできる膨張波と右側にできる衝撃波に関する式、

$$m_{j+1/3}(u_j - u^*) + p_j - p^* = 0, \quad (7.190)$$

$$m_{j+2/3}(u_{j+1} - u^*) + p_{j+1} - p^* = 0, \quad (7.191)$$

より、 u^* を消去すると、

$$p^* = \frac{u_{j+1} - u_j + \frac{p_{j+1}}{m_{j+2/3}} - \frac{p_j}{m_{j+1/3}}}{\frac{1}{m_{j+1/3}} - \frac{1}{m_{j+2/3}}}, \quad (7.192)$$

から、 p^* が求まる式になる。逐次近似法で求まった、 p^* を使うと、他のすべての物理量、 u^* 、 $\rho_{j+1/3}$ 、 $\rho_{j+2/3}$ 、 λ が求まる。

ここで、時間軸上の波が $x_{j+1/2}$ での数値流束を与える。さて、求まった衝撃波の速度が正の場合、すなわち**衝撃波-接触不連続面-膨張波の後端-膨張波の先端**の順にならんでいるとして、特性速度の大小関係が、

$$0 < \lambda < u^* < u^* + c_{j+2/3} < u_{j+1} + c_{j+1}, \quad (7.193)$$

の場合は、 $x_{j+1/2}$ での状態は、 U_j で与えられるので、数値流束は、

$$\bar{E}_{j+1/2} = E(U_j), \quad (7.194)$$

と計算される。次に、接触不連続面の速度は u^* で与えられるので、この速度が正の場合、すなわち

$$\lambda < 0 < u^* < u^* + c_{j+2/3} < u_{j+1} + c_{j+1}, \quad (7.195)$$

の場合は、 $x_{j+1/2}$ での状態は、 $U_{j+1/3}$ で与えられるので、数値流束は、

$$\bar{E}_{j+1/2} = E(U_{j+1/3}), \quad (7.196)$$

と計算される。次に、膨張波の後端の速度は $u^* + c_{j+2/3}$ で与えられるので、この速度が正の場合、すなわち

$$\lambda < u^* < 0 < u^* + c_{j+2/3} < u_{j+1} + c_{j+1}, \quad (7.197)$$

の場合は、 $x_{j+1/2}$ での状態は、 $U_{j+2/3}$ で与えられるので、この点での数値流束は、

$$\bar{E}_{j+1/2} = E(U_{j+2/3}), \quad (7.198)$$

と計算される。最後に、膨張波の先端の速度は $u_{j+1} + c_{j+1}$ で与えられるので、この速度が正の場合、すなわち

$$\lambda < u^* < u^* - c_{j+2/3} < 0 < u_{j+1} - c_{j+1}, \quad (7.199)$$

なら、 $x_{j+1/2}$ は膨張波の領域に含まれるので、

$$\varphi = u + c < u_{j+1} + c_{j+1}, \quad (7.200)$$

でパラメータ表示した場合に、 $\varphi = u + c = 0$ の特性線がこれに対応する。 $\varphi = 0$ の時の U の値を $U_{j+5/6}$ とおけば、

$$\begin{aligned} 0 &= \varphi_{j+5/6} = u_{j+5/6} + c_{j+5/6} \\ &= u_{j+5/6} - \left(u_{j+1} - \frac{2c_{j+1}}{\gamma-1} - \varphi_{j+1/2} \right) \frac{\gamma-1}{\gamma+1}, \end{aligned} \quad (7.201)$$

より、

$$u_{j+5/6} = -c_{j+5/6} = \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \left(u_{j+1} - \frac{2c_{j+1}}{\gamma-1} \right), \quad (7.202)$$

が求まる。さらに、圧力と密度が、

$$p_{j+5/6} = p_{j+1} \left(\frac{c_{j+5/6}}{c_{j+1}} \right)^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}}, \quad (7.203)$$

$$\rho_{j+5/6} = \rho_j \left(\frac{p_{j+5/6}}{p_{j+1}} \right)^{\frac{1}{\gamma}}, \quad (7.204)$$

と求まる。これらの値より、数値流束

$$\bar{E}_{j+1/2} = E(U_{j+5/6}), \quad (7.205)$$

として計算できる。

7.10 衝撃波-不連続面-衝撃波の場合

$$u_j - c_j > u_{j+1} - c_{j+1}, \quad (7.206)$$

の場合は、左側の特性速度の方が、右側の特性速度より大きいので、3つの波のうち、左側にできる波は衝撃波となる。さらに、

$$u_j + c_j > u_{j+1} + c_{j+1}, \quad (7.207)$$

の場合は、左側の特性速度の方が、右側の特性速度より大きいので、3つの波のうち、右側にできる波は衝撃波となる。このふたつの条件が共に満たされた時、 $(j, j+1)$ で、 x の正の方へ向かって、**衝撃波-接触不連続面-衝撃波** の順に並ぶ。

左側にできる衝撃波については、衝撃波の速度を λ_L とすると、

$$\lambda_L [U] = [E], \quad (7.208)$$

から、

$$\lambda_L (\rho_j - \rho_{j+1/3}) = \rho_j u_j - \rho_{j+1/3} u^*, \quad (7.209)$$

$$\lambda_L (\rho_j u_j - \rho_{j+1/3} u^*) = \rho_j u_j^2 + p_j - \rho_{j+1/3} u^{*2} - p^*, \quad (7.210)$$

$$\lambda_L (e_j - e_{j+1/3}) = (e_j + p_j) u_j - (e_{j+1/3} + p^*) u^*, \quad (7.211)$$

が成り立つ。右側にできる衝撃波については、衝撃波の速度を λ_R とすると、

$$\lambda_R [U] = [E], \quad (7.212)$$

から、

$$\lambda_R (\rho_{j+1} - \rho_{j+2/3}) = \rho_{j+1} u_{j+1} - \rho_{j+2/3} u^*, \quad (7.213)$$

$$\lambda_R (\rho_{j+1} u_{j+1} - \rho_{j+2/3} u^*) = \rho_{j+1} u_{j+1}^2 + p_{j+1} - \rho_{j+2/3} u^{*2} - p^*, \quad (7.214)$$

$$\lambda_R (e_{j+1} - e_{j+2/3}) = (e_{j+1} + p_{j+1}) u_{j+1} - (e_{j+2/3} + p^*) u^*, \quad (7.215)$$

未知数が p^* , u^* , $\rho_{j+1/3}$, $\rho_{j+2/3}$, λ_L , λ_R の6つで、式が6個あるから、これらは前節の場合と同様にして解ける。

次に、左側の衝撃波については、jump condition の最初の式 (7.209) から、

$$m_{j+1/3} \equiv \rho_j (u_j - \lambda_L) = \rho_{j+1/3} (u^* - \lambda_L), \quad (7.216)$$

として $m_{j+1/3}$ を定義しておく。Jump condition の2番目の式 (7.210) を変形して

$$\rho_j u_j (u_j - \lambda_L) + \rho_{j+1/3} u^* (\lambda_L - u^*) + p_j - p^* = 0, \quad (7.217)$$

となるから、

$$m_{j+1/3} (u_j - \lambda_L) + p_j - p^* = 0, \quad (7.218)$$

となる。これより、

$$m_{j+1/3} = -\frac{p_j - p^*}{u_j - u^*}, \quad (7.219)$$

となり、左側にできる膨張波に関するものと同じ形式になっている。さて、jump condition の3番目の式 (7.211) を変形して

$$e_j (u_j - \lambda_L) + e_{j+1/3} (\lambda_L - u^*) + p_j u_j - p^* u^* = 0, \quad (7.220)$$

となるので、前節と同様に変形して、プラスの符号をとって、

$$m_{j+1/3} = \sqrt{\rho_j p_j} \left\{ \frac{\gamma - 1}{2} + \frac{\gamma + 1}{2} \left(\frac{p^*}{p_j} \right) \right\}^{1/2}, \quad (7.221)$$

を得る。

次に、右側の衝撃波については、jump condition の最初の式 (7.213) から、

$$m_{j+2/3} \equiv \rho_{j+1} (u_{j+1} - \lambda_R) = \rho_{j+2/3} (u^* - \lambda_R), \quad (7.222)$$

として $m_{j+2/3}$ を定義しておく。Jump condition の2番目の式 (7.214) を変形して

$$\rho_{j+1} u_{j+1} (u_{j+1} - \lambda_R) + \rho_{j+2/3} u^* (\lambda_R - u^*) + p_{j+1} - p^* = 0, \quad (7.223)$$

となるから、

$$m_{j+2/3} (u_{j+1} - \lambda_R) + p_{j+1} - p^* = 0, \quad (7.224)$$

となる。これより、

$$m_{j+2/3} = -\frac{p_{j+1} - p^*}{u_{j+1} - u^*}, \quad (7.225)$$

となり、左側にできる膨張波に関するものと同じ形式になっている。さて、jump condition の3番目の式 (7.215) を変形して

$$e_{j+1} (u_{j+1} - \lambda_R) + e_{j+2/3} (\lambda_R - u^*) + p_{j+1} u_{j+1} - p^* u^* = 0, \quad (7.226)$$

とし、さらに変形して、最終的に、マイナス符号をとって、

$$m_{j+2/3} = -\sqrt{\rho_{j+1} p_{j+1}} \left\{ \frac{\gamma - 1}{2} + \frac{\gamma + 1}{2} \left(\frac{p^*}{p_{j+1}} \right) \right\}^{1/2}, \quad (7.227)$$

を得る。

ここで、接触不連続面の両側にできる衝撃波に関する式、

$$m_{j+1/3} (u_j - u^*) + p_j - p^* = 0, \quad (7.228)$$

$$m_{j+2/3} (u_{j+1} - u^*) + p_{j+1} - p^* = 0, \quad (7.229)$$

より、 u^* を消去すると、

$$p^* = \frac{u_{j+1} - u_j + \frac{p_{j+1}}{m_{j+2/3}} - \frac{p_j}{m_{j+1/3}}}{\frac{1}{m_{j+1/3}} - \frac{1}{m_{j+2/3}}}, \quad (7.230)$$

が得られ、 p^* が求まる。逐次近似法で求めた、 p^* を使うと、他のすべての物理量、 u^* 、 $\rho_{j+1/3}$ 、 $\rho_{j+2/3}$ 、 λ_L 、 λ_R が求まる。

ここで、時間軸上の波が $x_{j+1/2}$ での数値流束を与える。さて、求まった左側の衝撃波の速度が正の場合、すなわち**衝撃波-接触不連続面-衝撃波**の順にならんでいて、

$$0 < \lambda_L < u^* < \lambda_R, \quad (7.231)$$

の場合は、 $x_{j+1/2}$ での状態は、 U_j で与えられるので、数値流束は、

$$\bar{E}_{j+1/2} = E(U_j), \quad (7.232)$$

と計算される。次に、接触不連続面の速度は u^* で与えられるので、この速度が正の場合、すなわち

$$\lambda_L < 0 < u^* < \lambda_R, \quad (7.233)$$

の場合は、 $x_{j+1/2}$ での状態は、 $U_{j+1/3}$ で与えられるので、数値流束は、

$$\bar{E}_{j+1/2} = E(U_{j+1/3}), \quad (7.234)$$

と計算される。次に、右側の衝撃波の速度が正の場合、すなわち

$$\lambda_L < u^* < 0 < \lambda_R, \quad (7.235)$$

の場合は、 $x_{j+1/2}$ での状態は、 $U_{j+2/3}$ で与えられるので、この点での数値流束は、

$$\bar{E}_{j+1/2} = E(U_{j+2/3}), \quad (7.236)$$

と計算される。最後に、右側の衝撃波の速度が負の場合、すなわち

$$\lambda_L < u^* < \lambda_R < 0, \quad (7.237)$$

の場合は、 $x_{j+1/2}$ での状態は、 U_{j+1} で与えられるので、この点での数値流束は、

$$\bar{E}_{j+1/2} = E(U_{j+1}), \quad (7.238)$$

と計算される。